

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Differentialformen und Grundlagen der symplektischen Geometrie

Kurs auf der CdE-SommerAkademie 2022–3

Philip Schwartz (und Benjamin Haake)*

*Teile des Skripts basieren auf dem Skript zum Kurs „Einführung in die Differentialgeometrie“ auf der CdE-WinterAkademie 2018/19, den ich (Philip) zusammen mit Benni gehalten habe. Manches ist deshalb bestimmt von Benni geschrieben.

Dieses Skript wurde mit $\text{\LaTeX} 2_{\varepsilon}$ und der KOMA-Script-Klasse `scrbook` gesetzt. Als Hauptschriften wurden die URW Palladio L und die URW Classico von Hermann Zapf sowie die Pazo Math von Diego Puga verwendet.

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	1
0.1. Bekannte Konzepte, Notationen etc.	2
0.1.1. Grundlegende lineare Algebra	2
0.1.2. Dualräume	3
0.1.3. Mehrdimensionale Analysis	4
1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	7
1.1. Definition und Charakterisierungen	7
1.2. Glatte Abbildungen	10
1.3. Der Tangentialraum	13
1.4. Das Differential	20
2. Hutfunktionen, Vektorfelder und Einsformen	25
2.1. Ein analytischer Trick: Hutfunktionen und Zerlegungen der Eins	25
2.1.1. Abschneidefunktionen auf \mathbb{R} und Hutfunktionen im \mathbb{R}^n	25
2.1.2. Zerlegungen der Eins	28
2.1.3. Hutfunktionen auf Mannigfaltigkeiten	29
2.2. Vektorfelder	32
2.2.1. Grundlagen	32
2.2.2. Der Kommutator	34
2.3. Einsformen	36
3. Alternierende multilineare Algebra	39
3.1. Äußere Potenzen von Vektorräumen	40
3.2. Alternierende Multilinearformen	44
4. Differentialformen	49
4.1. Definition und erste Eigenschaften	49
4.2. Die äußere Ableitung	52

5. Transport und die Lie-Ableitung	57
5.1. Transport von Vektorfeldern und Formen	57
5.2. Integralkurven und Flüsse	59
5.3. Die Lie-Ableitung	62
6. Integration auf Mannigfaltigkeiten	67
6.1. Orientierbarkeit	67
6.2. Integration von Formen	71
6.3. Mannigfaltigkeiten mit Rand und der Satz von Stokes	73
7. Grundlagen der symplektischen Geometrie	79
7.1. Symplektische Vektorräume	79
7.2. Symplektische Mannigfaltigkeiten und der Satz von Darboux	80
7.3. Hamilton-Vektorfelder und geometrische Mechanik	81
A. Details zur Existenz von Zerlegungen der Eins	83

0. Einleitung

Differentialgeometrie ist die Lehre von Invarianz unter Notationswechsel.

ALTES CHINESISCHES SPRICHWORT

Die moderne/abstrakte Differentialgeometrie beschäftigt sich mit sogenannten *Mannigfaltigkeiten*, Verallgemeinerungen von Kurven und Flächen auf höhere Dimensionen. Sie untersucht diese Objekte mit Methoden der Differentialrechnung, die auf sie verallgemeinert werden.

Differentialgeometrische Methoden sind extrem wichtig innerhalb der Mathematik und auch in quasi allen ihren Anwendungsgebieten. Insbesondere aus der theoretischen Physik sind sie nicht wegzudenken – die allgemeine Relativitätstheorie und die klassische Formulierung von sogenannten Eichtheorien für die Quantenfeldtheorie basieren auf Differentialgeometrie, und auch ein fundamentales Verständnis allein schon der klassischen Mechanik benötigt differentialgeometrische Begriffe (symplektische Geometrie).

Historisch wurde die abstrakte Differentialgeometrie entwickelt, als BERNHARD RIEMANN Mannigfaltigkeiten einführte, um klassische Ideen von CARL FRIEDRICH GAUSS zu Kurven und Flächen zu verallgemeinern, und GREGORIO RICCI-CURBASTRO und TULLIO LEVI-CIVITA den Tensoralkül entwickelten. Die moderne, koordinatenfreie Sprache geht in ihren Ursprüngen auf ÉLIE CARTAN zurück.

Besonders mächtig ist das von Cartan entwickelte Konzept der sogenannten *Differentialformen*, das die von JOHANN FRIEDRICH PFAFF eingeführten „Pfaff’schen Formen“ (heute nennt man sie Differentialformen vom Grad 1) weitreichend verallgemeinert, indem es auf die auf HERMANN GRASSMANN zurückgehenden Methoden der sogenannten *äußeren Algebra* benutzt. Differentialformen ermöglichen gewissermaßen, auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit k -dimensionale orientierte Volumina in vom Punkt abhängiger Weise zu messen. Diese Beschreibung ist aber sowohl nicht wirklich verständlich, wenn man Differentialformen nicht schon kennt, als auch in vielerlei Hinsicht zu kurz greifend. Einen besseren Eindruck von der Fundamentalität des Konzepts von

Differentialformen erhält man vielleicht durch den folgenden Satz: *Die meisten Konzepte der modernen Differentialgeometrie lassen sich mithilfe von Differentialformen formulieren, und für die meisten Konzepte ist diese Formulierung auch eine der elegantesten und am weitesten reichenden.*

Wir werden in diesem Kurs die grundlegenden Begriffe der Theorie der Differentialformen Schritt für Schritt entwickeln. Dabei konzentrieren wir uns auf die grundlegenden Konzepte, sodass wir am Ende hoffentlich einen kleinen Ausblick auf die symplektische Geometrie bekommen können.

Dieses Skript ist an den meisten Stellen recht detailliert. Für Themen, die wir nicht behandeln, oder mehr Details bietet es sich an, in gute Lehrbücher zu gucken. Ein sehr gutes, sehr detailliertes Lehrbuch für grundlegende moderne Differentialgeometrie ist *Introduction to Smooth Manifolds* von John M. Lee, Band 218 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics* des Springer Verlags, DOI [10.1007/978-1-4419-9982-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5).

Jetzt aber genug des Vorgeplänkels – fangen wir an!

0.1. Bekannte Konzepte, Notationen etc.

Hier werden wir ein paar Konzepte der linearen Algebra und mehrdimensionalen Analysis wiederholen.

0.1.1. Grundlegende lineare Algebra

Definition 0.1. Ein (reeller) *Vektorraum* ist eine Menge V , deren Elemente man in „sinnvoller“ Art und Weise zueinander addieren („Vektoraddition“) und mit reellen Zahlen skalieren („Skalarmultiplikation“) kann.

Das ist natürlich keine formale Definition, aber die kennt ihr ja alle. Man kann Vektorräume auch über allgemeinen Körpern anstelle von \mathbb{R} definieren; wir benötigen allerdings nur reelle Vektorräume.

Definition 0.2. Eine (\mathbb{R} -)lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen zwei Vektorräumen ist eine Abbildung mit $f(\lambda v + \mu \tilde{v}) = \lambda f(v) + \mu f(\tilde{v})$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, \tilde{v} \in V$.

Der Kern von f ist der Untervektorraum $\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ von V .

Das Bild im $f = f(V)$ von f ist ein Untervektorraum von W .

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W schreibt man als

$$\text{Hom}(V, W) := \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ linear}\}. \quad (0.1)$$

Mit punktweiser Addition und Multiplikation ist sie selbst ein Vektorraum.

Ein *Isomorphismus* von Vektorräumen ist eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$, die sich durch eine lineare Abbildung $g: V \rightarrow W$ umkehren lässt, also $g \circ f = \text{id}_V$ und $f \circ g = \text{id}_W$. Wenn eine lineare Abbildung bijektiv ist, ist die Umkehrabbildung automatisch linear; also ist ein Isomorphismus äquivalent eine bijektive lineare Abbildung.

Proposition 0.3. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$.

Definition 0.4. Eine *Basis* von V ist eine Menge $\mathcal{B} \subset V$ von Vektoren, sodass sich jeder Vektor $v \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$ schreiben lässt mit Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und Basisvektoren $b_i \in \mathcal{B}$.

Die Kardinalität von \mathcal{B} ist die *Dimension* von V ; sie ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Definition 0.5. Der *Rang* einer linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist die Dimension des Bildes, $\text{rk } f := \dim \text{im } f$. Er ist höchstens das Minimum von $\dim V$ und $\dim W$.

Proposition 0.6. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist eindeutig festgelegt durch die Bilder einer Basis \mathcal{B} von V .

Dabei können die Bilder $f(b) \in W$ für $b \in \mathcal{B}$ beliebig gewählt werden; die darüber definierte lineare Abbildung f entsteht durch sogenannte *lineare Fortsetzung*.

Definition 0.7. Seien V und W endlich-dimensional, (b_1, \dots, b_n) eine (geordnete) Basis von V und (c_1, \dots, c_m) eine (geordnete) Basis von W . Die *Darstellungsmatrix* einer linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ bzgl. dieser Basen ist die $m \times n$ -Matrix

$$(f_j^i)_{i,j} = \begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^m & \cdots & f_n^m \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$

deren Komponenten durch $f(b_j) =: \sum_{i=1}^m f_j^i c_i$ definiert sind.

0.1.2. Dualräume

Definition 0.8. Für einen reellen Vektorraum V ist

$$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{f: V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ linear}\} \quad (0.3)$$

der *Dualraum* von V .

Definition 0.9. Für eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ definieren wir die *duale Abbildung* $f^*: W^* \rightarrow V^*$ durch $f^*(\eta) := \eta \circ f \in V^*$. f^* ist linear (Übung).

Proposition 0.10. Sei V endlich-dimensional und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V . Für $i = 1, \dots, n$ definieren wir $\theta^i \in V^*$ durch

$$\theta^i(b_j) := \delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (0.4)$$

und lineare Fortsetzung.

Dann ist $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ eine Basis von V^* . Man nennt sie die zu $\{b_i\}$ *duale Basis*. Insbesondere ist $\dim V = \dim V^*$.

Beweis. Sei $\eta \in V^*$. Wir müssen zeigen, dass sich η in eindeutiger Weise als $\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \theta^i$ schreiben lässt mit Zahlen $\eta_i \in \mathbb{R}$. Es ist aber $(\sum_{i=1}^n \eta_i \theta^i)(b_j) = \sum_{i=1}^n \eta_i \theta^i(b_j) = \sum_{i=1}^n \eta_i \delta_j^i = \eta_j$; also müssen wir einfach $\eta_j := \eta(b_j)$ setzen. \square

Proposition 0.11. Sei V ein Vektorraum. Wir definieren eine Abbildung $\Theta: V \rightarrow V^{**} := (V^*)^*$ durch $(\Theta(v))(\eta) := \eta(v)$ für $v \in V, \eta \in V^*$.

Θ ist linear und injektiv.

Beweis. Übung. \square

Wir können V also über Θ mit einem Unterraum von V^{**} identifizieren. Ist V endlich-dimensional, dann ist $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$, also ist Θ ein Isomorphismus.

0.1.3. Mehrdimensionale Analysis

Notation 0.12. Punkte im \mathbb{R}^n schreiben wir als $a = (a^1, \dots, a^n)$. Die Vektoren der Standardbasis von \mathbb{R}^n schreiben wir als $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$, also

$$e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0). \quad (0.5)$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Die Richtungsableitung von f in Richtung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir als $\partial_v f$, d. h. es ist

$$(\partial_v f)(a) = \left. \frac{df(a + hv)}{dh} \right|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} \quad (0.6)$$

für $a \in U$. Speziell schreiben wir die partielle Ableitung von f nach der i -ten Komponente als $\partial_i f := \partial_{e_i} f$. Ist f differenzierbar, dann lässt sich die Richtungsableitung in Richtung eines Vektors $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ mithilfe der partiellen Ableitungen ausdrücken als $(\partial_v f)(a) = \sum_{i=1}^n v^i (\partial_i f)(a)$.

Die *Jacobi-Matrix* einer Abbildung $f = (f^1, \dots, f^n): U \rightarrow V, U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ am Punkt $a \in U$ ist die $n \times m$ -Matrix

$$Jf|_a = \begin{pmatrix} (\partial_1 f^1)(a) & \dots & (\partial_m f^1)(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f^n)(a) & \dots & (\partial_m f^n)(a) \end{pmatrix}. \quad (0.7)$$

Satz 0.13 (Mehrdimensionale Kettenregel für vektorwertige Abbildungen). Seien $A \subset \mathbb{R}^l, B \subset \mathbb{R}^m, C \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f: A \rightarrow C$ differenzierbar, und für die Jacobi-Matrizen gilt

$$J(g \circ f)|_a = Jg|_{f(a)} \cdot Jf|_a \quad (0.8)$$

für $a \in A$. Mit Richtungsableitungen geschrieben heißt das

$$\left(\partial_v (g \circ f) \right) (a) = \left(\partial_{(\partial_v f)(a)} g \right) (f(a)) \quad (0.9)$$

für $v \in \mathbb{R}^l, a \in A$.

Speziell für den Fall $l = 1$, also $A \subset \mathbb{R}$, erhalten wir

$$(g \circ f)'(a) = \left(\partial_{f'(a)} g \right) (f(a)). \quad (0.10)$$

Die formale Definition von mehrdimensionaler (totaler) Differenzierbarkeit brauchen wir nicht; uns reicht die Aussage, dass sie von stetiger partieller Differenzierbarkeit impliziert wird.

Definition 0.14. Seien $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ heißt *k-fach stetig (partiell) differenzierbar* oder auch *von der Klasse C^k* , wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f$ der Ordnung k existieren und stetige Funktionen auf U sind.

f heißt *glatt*, von der Klasse C^∞ oder auch *beliebig/unendlich oft differenzierbar*, wenn es C^k für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist.

Nach Kettenregel (iterativ) sind Verkettungen glatter Funktionen wieder glatt.

Satz 0.15 (Satz von Schwarz). Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, so ist $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

Iterativ folgt, dass bei Anwendung auf glatte Funktionen beliebig viele partielle Ableitungen beliebig vertauschen, $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_r} f = \partial_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial_{i_{\sigma(r)}} f$ für beliebige Permutationen $\sigma \in S_r$.

Definition 0.16. Ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ ist eine bijektive \mathcal{C}^k -Abbildung $f: U \rightarrow V$, deren Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls \mathcal{C}^k ist.

Per Kettenregel erhält man, dass für jedes $a \in U$ die Jacobi-Matrix invertierbar ist mit $(Jf|_a)^{-1} = J(f^{-1})|_{f(a)}$. (Insb. muss dann also $m = n$ gelten, d. h. Diffeomorphismen erhalten die Dimension.)

Satz 0.17 (Satz von der inversen Abbildung). Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und sei $f: U \rightarrow V$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung. Ist $Jf|_a$ ein Isomorphismus, dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus um a , d. h. es gibt eine offene Umgebung $W \subset U$ von a , sodass $f|_W: W \rightarrow f(W)$ ein Diffeomorphismus ist.

Satz 0.18 (Satz von der impliziten Funktion). Sei $m > n$, seien $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $F: U \rightarrow V$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung. Die Jacobi-Matrix am Punkt $p \in U$ hat die Form

$$JF|_p = \begin{pmatrix} \partial_1 F^1 & \dots & \partial_n F^1 & \partial_{n+1} F^1 & \dots & \partial_m F^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F^n & \dots & \partial_n F^n & \partial_{n+1} F^n & \dots & \partial_m F^n \end{pmatrix} (p). \quad (0.11)$$

Ist die linke $n \times n$ -Teilmatrix invertierbar, dann lässt sich die Gleichung $F(a, b) = 0$ für $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^{m-n}$ in einer Umgebung von p nach a auflösen; d. h. es gibt offene Mengen $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^{m-n}$ mit $p \in A \times B \subset U$ und eine \mathcal{C}^k -Abbildung $G: B \rightarrow A$, sodass $F(a, b) = 0 \iff a = G(b)$ gilt.

1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Durch n malige Wiederholung dieses Verfahrens wird daher die Ortsbestimmung in einer n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Grössenbestimmungen [...] zurückgeführt.

BERNHARD RIEMANN

Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen
(1854)

The introduction of numbers as coordinates [...] is an act of violence [...].

HERMANN WEYL

Philosophy of Mathematics and Natural Science (1949)

1.1. Definition und Charakterisierungen

Definition 1.1. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \leq k$. Eine n -dimensionale (glatte¹ eingebettete) Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^k$, sodass es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ von p und einen C^∞ -Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^k$ gibt, $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^k$ offen, sodass

$$\varphi(U \cap M) = \{x \in \varphi(U) \mid x^{n+1} = \dots = x^k = 0\} \quad (1.1)$$

gilt. Bis auf Diffeomorphismen sieht M also lokal wie eine n -dimensionale Ebene im \mathbb{R}^k aus. Einen solchen Diffeomorphismus φ nennen wir einen *lokalen Flachmacher* für M um p .

Ein Beispiel für Untermannigfaltigkeiten sind Graphen von glatten Abbildungen:

¹Der Einfachheit halber betrachten wir nur glatte Untermannigfaltigkeiten. Vieles funktioniert analog für den Fall endlich-facher Differenzierbarkeit.

Proposition 1.2. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \leq k$. Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Teilmenge, die sich lokal als Graph von glatten Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ schreiben lässt, d. h. zu jedem Punkt $p \in M$ gebe es eine offene Umgebung $U = A \times B$ von p mit $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^{k-n}$ offen und eine glatte Abbildung $F: A \rightarrow B$, sodass

$$U \cap M = \left\{ (a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^{k-n}) \mid b = F(a) \right\} \quad (1.2)$$

gilt. Dann ist M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k .

Beweis. Wir müssen M lokal als eine Ebene darstellen. Zu $p \in M$ seien dazu $U = A \times B$ und $F: A \rightarrow B$ wie oben, also $U \cap M = \{(a, b) \mid b = F(a)\}$. Aus F können wir direkt einen lokalen Flachmacher konstruieren: Wir definieren durch

$$\varphi(a, b) := (a, b - F(a)) \quad (1.3a)$$

einen Diffeomorphismus

$$\varphi: U \rightarrow \{(\tilde{a}, \tilde{b}) \mid \tilde{a} \in A, \tilde{b} + F(\tilde{a}) \in B\} \subset \mathbb{R}^k. \quad (1.3b)$$

Nach Definition ist dann $\varphi(U \cap M) = \{(\tilde{a}, \tilde{b}) \mid \tilde{b} = 0\}$ wie gewünscht. \square

Bemerkung 1.3. Weil für jede Permutation $\sigma \in S_k$ die Abbildung $\varphi_\sigma: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$$\varphi_\sigma(x^1, \dots, x^k) := (x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(k)}), \quad (1.4)$$

die die Komponenten von Punkten in \mathbb{R}^k permutiert, ein Diffeomorphismus ist, reicht es in der vorigen Proposition auch aus, wenn M lokal bis auf Permutation der Komponenten ein Graph ist, d. h. wenn es jeweils eine Permutation $\sigma \in S_k$ sowie eine Umgebung U von $\varphi_\sigma(p)$ und ein F wie oben gibt, sodass $U \cap \varphi_\sigma(M)$ die Form (1.2) hat.

Später werden wir sehen, dass hiervon auch die Umkehrung gilt: Bis auf Permutation der Komponenten sind Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^k lokal immer Graphen.

Beispiel 1.4. (a) Offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ sind n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n (Identität als Flachmacher).

(b) Ebenen sind Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n (Identität als Flachmacher).

(c) Für eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^k$ ist auch jede offene Teilmenge $U \subset M$ (also ein Schnitt einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^k$ mit M) eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k : Indem wir Flachmacher für M auf U einschränken, erhalten wir Flachmacher für U .

- (d) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} , denn sie lässt sich lokal als Graph darstellen (Übung!).

Eine der wichtigsten Methoden, Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^k zu erhalten, ist der sogenannte *Satz vom regulären Wert* (genau genommen ist das Folgende ein Spezialfall des gleichnamigen Satzes für abstrakte Mannigfaltigkeiten). Dieser gibt ein vergleichsweise einfaches Kriterium dafür an, dass Mengen, die lokal als Urbilder von glatten Funktionen gegeben sind (bspw. Nullstellenmengen), Untermannigfaltigkeiten sind.

Satz 1.5 (Satz vom regulären Wert im \mathbb{R}^k). Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \leq k$, sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt. Es sei $q \in \mathbb{R}^n$ ein *regulärer Wert* von f , d. h. für jeden Punkt $p \in f^{-1}(\{q\})$ habe die Jacobi-Matrix $Jf|_p$ vollen Rang, also

$$\text{rk } Jf|_p = n. \quad (1.5)$$

Dann ist das Urbild $M := f^{-1}(\{q\}) \subset U$ eine $(k - n)$ -dimensionale (glatte eingebettete) Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k .

Beweis. Falls M leer ist, ist nichts zu zeigen. Sei also M nichtleer und $p \in M$. Nach Voraussetzung hat die Jacobi-Matrix

$$Jf|_p = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \dots & \partial_n f^1 & \partial_{n+1} f^1 & \dots & \partial_k f^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f^n & \dots & \partial_n f^n & \partial_{n+1} f^n & \dots & \partial_k f^n \end{pmatrix} (p) \quad (1.6)$$

Rang n . oBdA können wir annehmen, dass die ersten n Spalten dieser Matrix linear unabhängig sind (durch Vertauschen von Spalten, d. h. Permutation von Komponenten von Punkten im \mathbb{R}^k). Das bedeutet aber, dass die linke $n \times n$ -Teilmatrix invertierbar ist. Nach dem Satz von der impliziten Funktion (Satz 0.18) lässt sich also die Gleichung $f(a, b) - q = 0$ für $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^{k-n}$ in einer Umgebung von p nach a auflösen, d. h. es gibt eine lokal definierte glatte Abbildung $g: \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(a, b) - q = 0 \iff a = g(b)$. Wir haben M also bis auf Permutation von Komponenten lokal um p als Graph der glatten Abbildung g dargestellt. Nach Proposition 1.2 und Bemerkung 1.3 ist M damit eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $k - n$. \square

Man kann sich die Aussage des Satzes vom regulären Wert wie folgt veranschaulichen: Im k -dimensionalen \mathbb{R}^k haben wir n Gleichungen $f(p) = q$, die die Punkte $p \in M$ einschränken, also bleiben für die Punkte in M noch $k - n$ „Freiheitsgrade“, d. h. $\dim M = k - n$.

Mit dem Satz vom regulären Wert lässt sich sehr einfach zeigen, dass die Sphären S^n Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^{n+1} sind (Übung!).

Konstruktion 1.6. Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k . Jeder lokale Flachmacher $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ für M lässt sich schreiben als $\varphi = (\varphi_a, \varphi_b)$ mit $\varphi_a: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_b: U \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$, sodass $U \cap M$ durch die Gleichung $\varphi_b = 0$ gegeben ist. Weil φ ein Diffeomorphismus ist, ist die Jacobi-Matrix invertierbar, hat also vollen Rang k ; d. h.

$$k = \text{rk}(J\varphi) = \text{rk} \begin{pmatrix} J\varphi_a \\ J\varphi_b \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Damit hat auch die Teilmatrix $J\varphi_b$ auf ganz U vollen Rang $k - n$. Insbesondere ist also 0 ein regulärer Wert von φ_b . Nach dem Beweis des Satzes vom regulären Wert ist $M \cap U$ damit als Graph darstellbar, wir haben also wie versprochen die Umkehrung von Proposition 1.2 gezeigt.

1.2. Glatte Abbildungen

Konstruktion 1.7 (Induzierte Karte). Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k und $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ ein lokaler Flachmacher für M . Wir schreiben ihn als $\varphi = (\varphi_a, \varphi_b)$ mit $\varphi_a: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_b: U \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$, sodass $U \cap M$ durch $\varphi_b = 0$ gegeben ist. Die Abbildung

$$\hat{\varphi} := \varphi_a|_{U \cap M}: U \cap M \rightarrow \varphi_a(U \cap M) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid (a, 0) \in \varphi(U)\} \quad (1.8)$$

heißt die *von φ induzierte Karte von M* . Sie ist ein Homöomorphismus (also eine stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung) zwischen den offenen Mengen $(U \cap M) \subset M$ und $\hat{\varphi}(U \cap M) = \varphi_a(U \cap M) \subset \mathbb{R}^n$ (Übung: warum, was ist die Umkehrabbildung?).

Lemma 1.8. Sei M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k und seien $\varphi, \tilde{\varphi}$ lokale Flachmacher für M . Die von ihnen induzierten Karten seien $\hat{\varphi}: U \rightarrow \hat{\varphi}(U) \subset \mathbb{R}^n$, $\hat{\tilde{\varphi}}: V \rightarrow \hat{\tilde{\varphi}}(V) \subset \mathbb{R}^n$ (mit offenen Mengen $U, V \subset M$). Dann ist der *Kartenwechsel*

$$\hat{\tilde{\varphi}} \circ \hat{\varphi}^{-1} \Big|_{\hat{\varphi}(U \cap V)}: \hat{\varphi}(U \cap V) \rightarrow \hat{\tilde{\varphi}}(U \cap V) \quad (1.9)$$

eine glatte Abbildung (zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n).

Beweis. Übung. □

Definition 1.9. Seien M, N Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^k bzw. \mathbb{R}^l .² Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *glatt*, wenn für jeden lokalen Flachmacher φ für M mit induzierter

²Wir könnten oBdA annehmen, dass sie Untermannigfaltigkeiten desselben \mathbb{R}^k sind, aber wir wollen die formale Definition so allgemein wie möglich halten.

Karte $\hat{\varphi}: U \rightarrow \hat{\varphi}(U)$ und jeden lokalen Flachmacher ψ für N mit induzierter Karte $\hat{\psi}: V \rightarrow \hat{\psi}(V)$, für den $f(U) \subset V$ gilt, die folgende Abbildung glatt ist:

$$\hat{\psi} \circ f \circ \hat{\varphi}^{-1}: \hat{\varphi}(U) \rightarrow \hat{\psi}(V) \quad (1.10)$$

Diese Abbildung heißt die *Kartendarstellung* von f bzgl. der Karten $\hat{\varphi}$ und $\hat{\psi}$. Beachte, dass dies eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{\dim M}$ und $\mathbb{R}^{\dim N}$ ist, für die wir wissen, was Glattheit bedeutet.

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der lokalen Flachmacher, da Kartenwechsel glatt sind und Verkettungen glatter Abbildungen zwischen Teilmengen des \mathbb{R}^n glatt sind. Äquivalent kann daher auch gefordert werden, dass es für jeden Punkt $p \in M$ einen lokalen Flachmacher φ für M um p und einen lokalen Flachmacher ψ für N um $f(p)$ gibt, sodass die entsprechende Kartendarstellung von f glatt ist.

Wir schreiben $C^\infty(M, N)$ für die Menge der glatten Abbildungen von M nach N . Wir schreiben $C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$ für die Menge der (reellwertigen) glatten Funktionen auf M .

Analog kann man auch k -fach differenzierbare Abbildungen definieren und schreibt für diese $C^k(M, N)$.

Oft lässt sich Glattheit auch einfacher überprüfen:

Proposition 1.10. Seien M bzw. N Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^k bzw. \mathbb{R}^l . Ist $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ eine glatte Abbildung mit $f(M) \subset N$, dann ist auch $f|_M: M \rightarrow N$ glatt.

Beweis. Sei $\dim M = m$ und $\dim N = n$. Für $p \in M$ wählen wir Flachmacher φ von M um p bzw. ψ von N um $f(p)$. Die Kartendarstellung von $f|_M$ bzgl. der induzierten Karten $\hat{\varphi}$ und $\hat{\psi}$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} (\hat{\psi} \circ f|_M \circ \hat{\varphi}^{-1})(a^1, \dots, a^m) &= \hat{\psi}(f(\varphi^{-1}(a, 0))) \\ &= (\psi^1(f(\varphi^{-1}(a, 0))), \dots, \psi^n(f(\varphi^{-1}(a, 0)))) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Da f, φ^{-1}, ψ glatt sind, ist also auch $\hat{\psi} \circ f|_M \circ \hat{\varphi}^{-1}$ glatt und wir sind fertig. \square

Beispiel 1.11. Die Abbildung $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), 0)$ ist glatt (denn sie ist glatt als Abbildung nach \mathbb{R}^3).

Proposition 1.12. Sind $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow L$ glatte Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n , so ist auch $g \circ f: M \rightarrow L$ glatt.

Beweis. Übung. \square

1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Definition 1.13. Ein *Diffeomorphismus* ist eine bijektive Abbildung $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, für die $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ gilt.

Die Menge der Diffeomorphismen $\text{Diff}(M) \subset \mathcal{C}^\infty(M, M)$ bildet eine Gruppe.

Lemma 1.14. Ist M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k und φ ein lokaler Flachmacher für M , so ist die induzierte Karte $\hat{\varphi}: U \rightarrow \hat{\varphi}(U)$ ein Diffeomorphismus (zwischen den offenen Mengen $U \subset M$ und $\hat{\varphi}(U) \subset \mathbb{R}^n$).

Beweis. Übung. □

Definition 1.15. Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k . Eine *Karte* für M ist ein Diffeomorphismus $x: U \rightarrow x(U)$ zwischen einer offenen Menge $U \subset M$ und einer offenen Menge $x(U) \subset \mathbb{R}^n$. Die einzelnen Komponenten von $x = (x^1, \dots, x^n)$ nennen wir *Koordinatenfunktionen* der Karte (oder, wenn wir nicht so genau sind, „Koordinaten“). Die *Koordinaten* eines Punkts $p \in U$ bzgl. der Karte x sind die Zahlen $x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$.

Bemerkung 1.16. Weil Kartenwechsel $\tilde{x} \circ x^{-1}$ zwischen beliebigen Karten glatt sind, können wir Glattheit einer Abbildung $f: M \rightarrow N$ mithilfe beliebiger Karten überprüfen, nicht nur mithilfe von Flachmachern induzierter Karten: f ist genau dann glatt, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte x für M um p und eine Karte y für N um $f(p)$ gibt, sodass die lokale Kartendarstellung $y \circ f \circ x^{-1}$ (eingeschränkt auf ihren maximalen Definitionsbereich) glatt ist. (Versuche, dir diese Aussage(n) klarzumachen!)

Definition 1.17. Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k , $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte für M und $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ eine glatte Funktion. Die *i -te partielle Ableitung von f bzgl. x* für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist die glatte Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} := \left(\partial_i (f \circ x^{-1}) \right) \circ x \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad (1.12a)$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \left(\partial_i (f \circ x^{-1}) \right) (x(p)). \quad (1.12b)$$

Wir nehmen also die Kartendarstellung von f , bilden davon die i -te partielle Ableitung, und machen daraus wieder eine lokale Funktion auf der Untermannigfaltigkeit. Dieses Objekt ist natürlich hochgradig von der Wahl der Karte abhängig – bei einer anderen Karte kriegen wir auch eine andere Ableitung.

Beispiel 1.18. Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a^1, a^2) = a^1$. Bzgl. der Karte $x = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ hat f die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^1}(a) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x^2}(a) = 0$ (Übung: Rechne das nach!). Bzgl. der Karte y definiert durch $y(a) = (a^1 + a^2, a^2)$ haben wir stattdessen

$\frac{\partial f}{\partial y^1}(a) = 1, \frac{\partial f}{\partial y^2}(a) = -1$ (Übung: Rechne auch das nach!). Obwohl also $x^2 = y^2$ ist, haben wir $\frac{\partial f}{\partial x^2} \neq \frac{\partial f}{\partial y^2}$.

Als Gleichheit von Funktionen können wir auch $f = x^1 = y^1 - y^2$ schreiben. Damit nehmen die obigen partiellen Ableitungen eine sehr suggestive Form an, bspw. $-1 = \frac{\partial f}{\partial y^2} = \frac{\partial(y^1 - y^2)}{\partial y^2}$.

1.3. Der Tangentialraum

‘Would you tell me, please, which way I ought to go from here?’
 ‘That depends a good deal on where you want to get to,’ said the Cat.
 ‘I don’t much care where——’ said Alice.
 ‘Then it doesn’t matter which way you go,’ said the Cat.
 ‘——so long as I get somewhere,’ Alice added as an explanation.
 ‘Oh, you’re sure to do that,’ said the Cat, ‘if you only walk long enough.’

Alice’s Adventures in Wonderland
 (LEWIS CARROLL)

Wir möchten jetzt den Begriff von „Richtungen“ auf einer Untermannigfaltigkeit formalisieren. Die anschauliche Idee ist hier wie folgt: In jedem Punkt $p \in M \subset \mathbb{R}^k$ können wir uns eine ($\dim M$ -dimensionale) Tangentialebene vorstellen, in der Tangentialvektoren liegen, die den möglichen Richtungen entsprechen, in die man sich entlang M bewegen kann, vgl. Abbildung 1.1. Die möglichen Richtungen am Punkt p entsprechen also Ableitungen von Kurven in \mathbb{R}^k , die in der Mannigfaltigkeit und durch p verlaufen.

Sei im Folgenden M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k .

Definition 1.19. Sei $p \in M$. Der *Tangentialraum* an M im Punkt p ist

$$T_p M := \{p\} \times \{\gamma'(0) \mid \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ glatt mit } \gamma(0) = p\} \subset \{p\} \times \mathbb{R}^k, \quad (1.13)$$

wobei $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^k$ die übliche Ableitung der \mathbb{R}^k -wertigen Abbildung γ bezeichnet. Elemente von $T_p M$ heißen *Tangentialvektoren* an M in p .

Dadurch, dass wir $T_p M$ nicht einfach nur als Menge der Ableitungen von Kurven durch p definiert haben, sondern den Basispunkt p mit dazugenommen haben, gibt jeder Tangentialvektor $v \in T_p M$ nicht nur eine Richtung an, sondern „weiß auch, an welchem Punkt er lebt“.

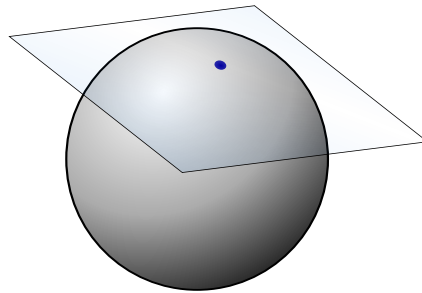


Abbildung 1.1.: Anschauliche Tangentialebene an S^2 in \mathbb{R}^3

Notation 1.20. Für eine glatte Kurve γ in M , also eine glatte Abbildung $\gamma: I \rightarrow M$, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, schreiben wir ihren Geschwindigkeitsvektor zur Zeit $t \in I$ als

$$\dot{\gamma}(t) := (\gamma(t), \gamma'(t)) \in T_{\gamma(t)}M. \quad (1.14a)$$

Oft nennen wir dies auch einfach die *Ableitung* von γ zum Zeitpunkt t . Wir schreiben dafür auch

$$\left. \frac{d}{dt} \gamma(t) \right|_{t=0} := \dot{\gamma}(t), \quad (1.14b)$$

besonders, wenn die Kurvenabbildung γ kein eigenes Symbol hat.

Wie im \mathbb{R}^n können wir auch auf Mannigfaltigkeiten Funktionen in Richtung von Vektoren ableiten:

Definition 1.21. Sei $v \in T_pM$ ein Tangentialvektor und $f \in C^\infty(U)$ eine glatte Funktion, die auf einer offenen Umgebung $U \subset M$ von p definiert ist. Die *Richtungsableitung* von f in Richtung v ist

$$v(f) := (f \circ \gamma)'(0), \quad (1.15)$$

wobei γ eine beliebige glatte Kurve in M durch p , d. h. $\gamma(0) = p$, mit $v = \dot{\gamma}(0)$ ist. Beachte, dass $f \circ \gamma$ eine glatte Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}$ ist, mit $I \subset \mathbb{R}$ einem Intervall, von der wir die übliche Ableitung bilden können. $(\dot{\gamma}(0))(f)$ ist die Ableitung von f entlang der Kurve γ zur Zeit 0, also die Änderungsrate von f entlang von γ .

Für den Fall $M = \mathbb{R}^k$ ist dies einfach die übliche Richtungsableitung.

Lemma 1.22. Die Richtungsableitung $v(f)$ ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl der Kurve ab.

Beweis. Sei γ eine Kurve in M durch p mit $v = \dot{\gamma}(0)$. Wir müssen zeigen, dass $(f \circ \gamma)'(0)$ nur von v , also nur von $\gamma'(0)$, abhängt. Die Idee hierbei ist, die Kettenregel (Satz 0.13)

zu verwenden. Direkt auf die Verkettung $f \circ \gamma$ lässt sie sich aber nicht anwenden, denn f ist nur auf einer offenen Teilmenge von M definiert – das ist im Allgemeinen keine offene Teilmenge eines \mathbb{R}^l .

Dieses Problem lässt sich aber mithilfe eines lokalen Flachmachers umgehen. Sei $\varphi: V \rightarrow \varphi(V)$ ein lokaler Flachmacher für M um p , den wir als $\varphi = (\varphi_a, \varphi_b)$ mit $\varphi_a: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_b: V \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ schreiben, sodass die induzierte Karte durch $\hat{\varphi} = \varphi_a|_{V \cap M}: V \cap M \rightarrow \varphi_a(V \cap M)$ gegeben ist. oBdA nehmen wir $f \in C^\infty(V \cap M)$ an.

Auf einem genügend kleinen Intervall um 0 gilt dann

$$f \circ \gamma = (f \circ \hat{\varphi}^{-1}) \circ (\hat{\varphi} \circ \gamma). \quad (1.16)$$

Damit können wir jetzt die Kettenregel (Satz 0.13) anwenden und erhalten

$$(f \circ \gamma)'(0) = J(f \circ \hat{\varphi}^{-1})|_{\hat{\varphi}(p)} \cdot (\hat{\varphi} \circ \gamma)'(0). \quad (1.17)$$

Nun ist aber einerseits $(\varphi \circ \gamma)(t) = ((\hat{\varphi} \circ \gamma)(t), 0)$, also $(\varphi \circ \gamma)'(0) = ((\hat{\varphi} \circ \gamma)'(0), 0)$, und andererseits wieder nach Kettenregel

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = J\varphi|_p \cdot \gamma'(0); \quad (1.18)$$

also ist $(\hat{\varphi} \circ \gamma)'(0)$ durch $\gamma'(0)$ bestimmt. Mit (1.17) ist damit die Richtungsableitung schon durch $\gamma'(0)$ bestimmt und wir sind fertig. \square

Definition 1.23. Sei $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte für M um einen Punkt $p \in M$, und $i \in \{1, \dots, n\}$. Für genügend kleine t liegt $x(p) + te_i$ in $x(U) \subset \mathbb{R}^n$, d. h. $t \mapsto x^{-1}(x(p) + te_i)$ ist eine Kurve durch p in U . Dies ist gerade die i -te *Koordinatenlinie* bzgl. x durch p , d. h. die Kurve durch p , entlang derer die Koordinate x^i variiert und die anderen Koordinaten $x^j, j \neq i$ konstant bleiben.

Die Ableitung der i -ten Koordinatenlinie durch p ist der i -te *Koordinatenvektor* bzgl. x im Punkt p , geschrieben

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p := \frac{d}{dt} x^{-1}(x(p) + te_i) \Big|_{t=0} \in T_p M. \quad (1.19)$$

Die Notation für Koordinatenvektoren beruht auf der folgenden Tatsache:

Proposition 1.24. Sei x eine Karte um $p \in M$, und $f \in C^\infty(U)$ für eine offene Umgebung $U \subset M$ von p . Die Richtungsableitung von f in Richtung des i -ten Koordinatenvektors in p bzgl. x ist die i -te partielle Ableitung von f bzgl. x an der Stelle p , d. h.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \quad (1.20)$$

1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Beweis. Wir schreiben die i -te Koordinatenlinie durch p als $\gamma = x^{-1} \circ \tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma}(t) = x(p) + te_i$. Nach Definition des Koordinatenvektors und der Richtungsableitung ist damit

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) &= (\dot{\gamma}(0))(f) = (f \circ \gamma)'(0) \\
 &= \left((f \circ x^{-1}) \circ \tilde{\gamma} \right)'(0) \\
 \text{(Kettenregel (0.10))} &= \left(\partial_{\tilde{\gamma}'(0)}(f \circ x^{-1}) \right) (\tilde{\gamma}(0)) \\
 &= \left(\partial_i(f \circ x^{-1}) \right) (x(p)) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \tag{1.21}
 \end{aligned}$$

□

Dies liefert uns eine geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen bzgl. einer Karte: sie sind die Änderungsraten der abgeleiteten Funktion entlang der Koordinatenlinien. Damit ist klar, dass für verschiedene Karten $x \neq y$ auch im Fall einer gleichen Koordinatenfunktion $x^i = y^i$ die entsprechenden partiellen Ableitungen im Allgemeinen verschieden sind: Die i -te Koordinatenlinie ist die Kurve, entlang derer die *anderen* Koordinaten konstant sind und die i -te variiert; auch im Fall $x^i = y^i$ sind für verschiedene Karten $x \neq y$ die i -ten Koordinatenlinien bzgl. x bzw. y also verschiedene Kurven.

Lemma 1.25. Sei $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte für M um p . Wenn wir x^{-1} als Abbildung in den $\mathbb{R}^k \supset M$ betrachten, lassen sich die Koordinatenvektoren schreiben als

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = \left(p, (\partial_i x^{-1})(x(p)) \right), \tag{1.22}$$

und sie sind linear unabhängig im Vektorraum $\{p\} \times \mathbb{R}^k$.

Beweis. Schreiben wir die i -te Koordinatenlinie durch p wieder als $\gamma = x^{-1} \circ \tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma}(t) = x(p) + te_i$, so erhalten wir nach Definition

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p &= \dot{\gamma}(0) = (p, \gamma'(0)) \\
 &= \left(p, (x^{-1} \circ \tilde{\gamma})'(0) \right) \\
 \text{(Kettenregel (0.10))} &= \left(p, (\partial_{\tilde{\gamma}'(0)} x^{-1})(\tilde{\gamma}(0)) \right) \\
 &= \left(p, (\partial_i x^{-1})(x(p)) \right). \tag{1.23}
 \end{aligned}$$

Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, bemerken wir zuerst, dass $\partial_i x^{-1}$ die i -te Spalte der Jacobi-Matrix von $x^{-1}: x(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist; wir müssen also zeigen, dass $Jx^{-1}|_{x(p)}$ Rang $n = \dim M$ hat. Sei dafür $\varphi: V \rightarrow \varphi(V)$ ein lokaler Flachmacher für M um p , den wir wieder als $\varphi = (\varphi_a, \varphi_b)$ mit $\varphi_a: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_b: V \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ schreiben, sodass die induzierte Karte durch $\hat{\varphi} = \varphi_a|_{V \cap M}: V \cap M \rightarrow \varphi_a(V \cap M)$ gegeben ist. Wir wissen, dass der Kartenwechsel $\hat{\varphi} \circ x^{-1}$ (auf der Umgebung von $x(p)$, auf der er definiert ist) ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n ist; also ist $\text{rk} J(\hat{\varphi} \circ x^{-1})|_{x(p)} = n$. Andererseits können wir aber $\hat{\varphi} \circ x^{-1} = \varphi_a \circ x^{-1}$ schreiben und darauf die Kettenregel (Satz 0.13) anwenden, womit wir

$$J(\hat{\varphi} \circ x^{-1})|_{x(p)} = J(\varphi_a \circ x^{-1})|_{x(p)} = J(\varphi_a)|_p \cdot Jx^{-1}|_{x(p)} \quad (1.24)$$

erhalten. Weil das Produkt Rang n hat, haben auch die beiden Faktoren mindestens Rang n . Damit hat die $n \times k$ -Matrix $Jx^{-1}|_{x(p)}$ also Rang n und wir sind fertig. \square

Konstruktion 1.26. Sei jetzt $v \in T_p M$ ein beliebiger Tangentialvektor und x eine Karte um p . Nach Definition ist $v = (p, \gamma'(0))$ mit einer Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ durch p . Indem wir wieder x^{-1} als Abbildung in den $\mathbb{R}^k \supset M$ betrachten, erhalten wir mit der Kettenregel (Satz 0.13)

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= (x^{-1} \circ (x \circ \gamma))'(0) \\ &= J(x^{-1})|_{x(p)} \cdot (x \circ \gamma)'(0) \\ &= \sum_{i=1}^n (\partial_i x^{-1})(x(p)) \cdot \underbrace{(x^i \circ \gamma)'(0)}_{=v(x^i)}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Wir können $v \in T_p M$ also als

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \cdot \left(p, (\partial_i x^{-1})(x(p)) \right) \quad (1.26)$$

schreiben, wobei die rechte Seite als Linearkombination im Vektorraum $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ zu verstehen ist. Kombiniert mit Lemma 1.25 ergibt das

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p; \quad (1.27)$$

jeder Tangentialvektor $v \in T_p M$ lässt sich also als Linearkombination von Koordinatenvektoren schreiben. Weil die Koordinatenvektoren linear unabhängig sind, ist diese Entwicklung eindeutig.

1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Andererseits ist auch jede Linearkombination von Koordinatenvektoren ein Tangentialvektor: Für eine allgemeine Linearkombination

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \in \{p\} \times \mathbb{R}^k \quad (1.28)$$

definiert $\gamma(t) := x^{-1}(x(p) + t(v^1, \dots, v^n))$ eine Kurve durch p , die nach Konstruktion $(x^i \circ \gamma)'(0) = v^i$ und damit (nach der obigen Rechnung) $\dot{\gamma}(0) = v$ erfüllt.

Damit haben wir bewiesen:

Satz 1.27. $T_p M$ ist ein Untervektorraum von $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ mit $\dim T_p M = \dim M$. Für jede Karte x von M um p bilden die Koordinatenvektoren $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ eine Basis von $T_p M$. Die Darstellung eines beliebigen Tangentialvektors $v \in T_p M$ in dieser Basis ist

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \quad \text{mit} \quad v^i = v(x^i). \quad (1.29)$$

□

Definition 1.28. Der Dualraum von $T_p M$ ist der *Kotangentenraum* $T_p^* M := (T_p M)^*$ an M im Punkt p .

Proposition 1.29 (Tangentenraum beim Satz vom regulären Wert). Ist M lokal in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ als Urbild eines regulären Werts q einer glatten Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ gegeben, also $U \cap M = f^{-1}(\{q\})$, dann ist für $p \in U \cap M$ der Tangentialraum gegeben durch

$$T_p M = \{p\} \times \ker(Jf|_p). \quad (1.30)$$

Beweis. Ist γ eine Kurve in M durch p , so liegt $\gamma(t)$ für genügend kleine t in $U \cap M$; es gilt also $f(\gamma(t)) = q$. Abgeleitet erhalten wir mit Kettenregel

$$\begin{aligned} 0 &= (f \circ \gamma)'(0) \\ &= Jf|_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) \\ &= Jf|_p(\gamma'(0)), \end{aligned} \quad (1.31)$$

also $\gamma'(0) \in \ker(Jf|_p)$. Das zeigt $T_p M \subset \{p\} \times \ker(Jf|_p)$. Aus Dimensionsgründen folgt die Gleichheit. □

Notation 1.30 (Einstein'sche Summenkonvention). Da bei Rechnungen in Koordinaten oder bzgl. Basen oft Summen der Form

$$\sum_{i=1}^n v^i b_i \quad (1.32a)$$

auftreten, vereinbaren wir, um die Notation zu verkürzen, dass in Zukunft bei solchen Summationen das Summenzeichen weggelassen werden kann; stattdessen schreiben wir in Zukunft also

$$v^i b_i. \tag{1.32b}$$

Immer, wenn in einem Term ein Index zweimal vorkommt, *einmal oben an einem Symbol und einmal unten*, wird dieser Term über alle im jeweiligen Kontext möglichen Werte des Index aufsummiert. Ein komplizierteres (völlig willkürliches) Beispiel für einen Ausdruck in Summenkonvention und seine Bedeutung ist

$$T_{kl}^{ij} S^k_j v^l b_i = \sum_{i,j,k,l=1}^n T_{kl}^{ij} S^k_j v^l b_i. \tag{1.33}$$

Die Komponenten von Tangentialvektoren schreiben wir mit oberen Indizes, Basisvektoren des Tangentialraums dementsprechend mit unteren Indizes. Einen oberen Index, der wie in $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ „im Nenner“ steht, fassen wir dementsprechend als unteren Index auf.

Mit Summenkonvention lautet die obige Entwicklungsformel für Tangentialvektoren also

$$v = v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p. \tag{1.34}$$

Proposition 1.31 (Transformationsformel für Tangentialvektoren). Seien x, \tilde{x} zwei Karten um $p \in M$. Für die Koordinatenvektoren gilt³

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_p = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p. \tag{1.35}$$

Für die Komponenten eines Tangentialvektors $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_p$ gilt dementsprechend

$$\tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) v^i. \tag{1.36}$$

Beweis. Übung. □

³Ausgeschrieben bedeutet das, dass die Basiswechselmatrix von der Koordinatenbasis bzgl. x zu der bzgl. \tilde{x} die Jacobi-Matrix des inversen Kartenwechsels $x \circ \tilde{x}^{-1}$ an der Stelle $\tilde{x}(p)$ ist, denn

$$\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}(p) = (J(x \circ \tilde{x}^{-1})|_{\tilde{x}(p)})^j_i.$$

1.4. Das Differential

Mithilfe des Tangentialraumbegriffs können wir nun nicht nur entscheiden, ob Abbildungen differenzierbar sind, sondern auch tatsächlich einen Ableitungsbegriff definieren:

Definition 1.32. Seien M, N Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^k bzw. \mathbb{R}^l und $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Das *Differential* von f im Punkt $p \in M$ ist die lineare Abbildung

$$Df|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \quad (1.37a)$$

definiert durch

$$Df|_p(\dot{\gamma}(0)) := \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} \quad (1.37b)$$

für jede glatte Kurve γ in M durch p .

Wenn wir uns auf M also vom Punkt p aus in Richtung $v := \dot{\gamma}(0)$ bewegen, dann bewegt sich unser Bild unter f auf N in Richtung $Df|_p(v)$. Das Differential beschreibt also in einem sinnvollen Sinne, wie sich „Richtungen“ auf Untermannigfaltigkeiten unter glatten Abbildungen verhalten.

Lemma 1.33. $Df|_p$ ist tatsächlich wohldefiniert (also unabhängig von der Wahl der Kurve) und linear.

Beweis. Übung. (Tipp: Wähle eine Karte x für M um p , füge in $f \circ \gamma$ in der Mitte $\text{id}_U = x^{-1} \circ x$ ein und benutze die Kettenregel (Satz 0.13), um zu zeigen, dass $(f \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^l$ nur von Richtungsableitungen der Koordinatenfunktionen x^i in Richtung von $\dot{\gamma}(0)$ abhängt, und das linear.) \square

Proposition 1.34. Sei M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k , $U \subset M$ offen, $p \in U$ und $f \in C^\infty(U)$. Das Differential von f in p ist gegeben durch

$$Df|_p(v) = (f(p), v(f)) = v(f) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{f(p)} \in T_{f(p)} \mathbb{R}, \quad (1.38)$$

wobei $t = \text{id}_{\mathbb{R}}$ die kanonische Karte für \mathbb{R} ist. Das Differential einer reellwertigen Funktion ist also gewissermaßen durch die Richtungsableitung gegeben (eben bis auf die kanonische Identifikation $T_{f(p)} \mathbb{R} \ni \lambda \cdot \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{f(p)} \equiv \lambda \in \mathbb{R}$).

Beweis. Übung. (Tipp: Das folgt direkt durch Ausschreiben der Definition.) \square

Notation 1.35. Für die Richtungsableitung einer Funktion f in Richtung eines Tangentialvektors $p \in T_p M$ schreiben wir in Anbetracht der vorigen Proposition auch $df|_p(v) := v(f)$. Die so definierte lineare Abbildung

$$df|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad df|_p(v) = v(f) \quad (1.39)$$

nennen wir auch das Differential von f in p .

Proposition 1.36. Sei M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k und x eine Karte für M um $p \in M$. Die zur Koordinatenbasis $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ von $T_p M$ duale Basis von $T_p^* M$ ist gegeben durch die Differentiale $\left\{ dx^i \Big|_p \right\}$ der Koordinatenfunktionen.

Für $f \in C^\infty(U)$ mit $p \in U$ ist die Entwicklung des Differentials von f in dieser Basis gegeben durch

$$df|_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i \Big|_p. \quad (1.40)$$

Beweis. Übung. (Tipp: Um zu zeigen, dass die Basen dual zueinander sind, schreibe die Richtungsableitung aus. Benutze dann, wie man Komponenten bzgl. einer dualen Basis berechnet (Beweis von Proposition 0.10).) \square

Satz 1.37 (Kettenregel). Seien $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow L$ glatte Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n , und $p \in M$. Dann gilt

$$D(g \circ f)|_p = Dg|_{f(p)} \circ Df|_p. \quad (1.41)$$

Beweis. Übung. (Tipp: Das lässt sich direkt mithilfe der Definition nachrechnen. Benutze, dass $f \circ \gamma$ eine glatte Kurve in N durch $f(p)$ ist!) \square

Bemerkung 1.38. Im Fall $L = \mathbb{R}$ lässt sich die Kettenregel auch schreiben als

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \circ Df|_p. \quad (1.42)$$

Proposition 1.39. (a) $D(\text{id}_M)|_p = \text{id}_{T_p M}$

(b) Ist $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, so ist $Df|_p$ für jedes $p \in M$ ein Isomorphismus, und es gilt $Df^{-1}|_{f(p)} = (Df|_p)^{-1}$.

Beweis. Übung. (Tipp: Verwende die Kettenregel.) \square

1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Proposition 1.40 (Differential in Karten). Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^k bzw. \mathbb{R}^l . Sei $p \in M$, x eine Karte für M um p und y eine Karte für N um $f(p)$. Dann wirkt das Differential $Df|_p$ bzgl. der Koordinatenbasen $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ von $T_p M$ und $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)} \right\}$ von $T_{f(p)} N$ gemäß⁴

$$Df|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)}. \quad (1.43)$$

Beweis. Für ein allgemeines $v \in T_p M$ haben wir nach der Entwicklungsformel für Tangentialvektoren

$$Df|_p(v) = \left(Df \Big|_p(v) \right) (y^j) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)}, \quad (1.44)$$

wobei nach der Kettenregel

$$\left(Df \Big|_p(v) \right) (y^j) = dy^j|_{f(p)} \left(Df \Big|_p(v) \right) = \left(d(y^j \circ f) \Big|_p \right) (v) = v(y^j \circ f) \quad (1.45)$$

gilt. Angewendet auf $v = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ folgt die Aussage. \square

Satz 1.41 (Satz von der inversen Abbildung für Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n). Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Ist $Df|_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ein Isomorphismus, dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus um p , d. h. es gibt eine offene Umgebung $U \subset M$ von p , sodass $f|_U: U \rightarrow f(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Das folgt, indem man den Satz von der inversen Abbildung auf die Kartendarstellung von f anwendet. \square

Notation 1.42. Im Folgenden benutzen wir statt „glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n für ein $n \in \mathbb{N}_0$ “ einfach den Begriff *glatte oder differenzierbare Mannigfaltigkeit*. Eigentlich meint dieser Begriff *abstrakte glatte Mannigfaltigkeiten*, die nicht als Untermannigfaltigkeiten eines \mathbb{R}^n definiert sind; nach dem *Einbettungssatz von Whitney* lassen sich diese aber immer in einen \mathbb{R}^n einbetten.

⁴Ausgeschrieben bedeutet das, dass die Darstellungsmatrix von $Df|_p$ bzgl. der beiden Koordinatenbasen die Jacobi-Matrix der Kartendarstellung von f an der Stelle $x(p)$ ist, denn

$$\frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}(p) = (J(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)})^j_i.$$

Wir werden im Folgenden nur die Beschreibungen von Objekten auf Mannigfaltigkeiten benutzen, die auch im abstrakten Fall funktionieren, nämlich solche, die Karten benutzen. Damit funktioniert alles, was wir im Kurs machen werden, genauso auf abstrakten Mannigfaltigkeiten. Alle in diesem Kapitel behandelten Aussagen über Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n , die den umgebenden Raum \mathbb{R}^n nicht explizit benutzen, gelten genauso für abstrakte Mannigfaltigkeiten.⁵

⁵Der Grund dafür, dass wir hier Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n statt abstrakter Mannigfaltigkeiten definiert haben, ist, dass für erstere die Definition etwas konkreter ist und sich der Tangentialraum „direkter“ definieren lässt, eben als Menge der Ableitungen von Kurven; gewissermaßen sind Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n also ein bisschen niederschwelliger.

2. Hutfunktionen, Vektorfelder und Einsformen

2.1. Ein analytischer Trick: Hutfunktionen und Zerlegungen der Eins

I could be bounded in a nutshell, and count myself a king of infinite space [. . .].

HAMLET

The Tragicall Historie of Hamlet, Prince of Denmarke, Akt II,

Szene ii

(WILLIAM SHAKESPEARE)

Von recht großer Bedeutung in der (glatten) Differentialgeometrie sind sogenannte *Hutfunktionen*¹, glatte Funktionen, die auf einer gegebenen abgeschlossenen Menge A konstant 1 sind, außerhalb einer größeren offenen Menge $U \supset A$ allerdings 0. Sie ermöglichen, Eigenschaften oder geometrische Objekte zu „lokalisieren“.

Verwandt und ebenso wichtig sind *Zerlegungen der Eins*, Familien von jeweils in den Mengen einer gegebenen offenen Überdeckung getragenen Funktionen, deren Summe die konstante Einsfunktion ergibt. Diese kann man benutzen, um lokale Konstruktionen zu globalen „zusammenzustückeln“.

Wir wollen jetzt die Existenz von Hutfunktionen und Zerlegungen der Eins zeigen. Dabei orientieren wir uns stark am entsprechenden Abschnitt im Buch von Lee.

2.1.1. Abschneidefunktionen auf \mathbb{R} und Hutfunktionen im \mathbb{R}^n

Als erstes brauchen wir die Existenz einer glatten Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf der negativen reellen Achse konstant 0, auf der positiven aber positiv ist:

¹Das ist kein Standard-Name. Auf Englisch werden diese Funktionen meist *bump functions* genannt, eine gute deutsche Entsprechung gibt es nicht wirklich.

Lemma 2.1. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) := \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-1/t} & t > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

ist glatt.

Beweis. Auf $(-\infty, 0)$ ist f konstant 0, also auch alle Ableitungen; auf $(0, \infty)$ ist f als Verkettung glatter Funktionen glatt. Interessant ist also die Frage, ob alle Ableitungen am Punkt 0 existieren.

Damit wir dies untersuchen können, betrachten wir zunächst die k -ten Ableitungen $f^{(k)}(t)$ für $t > 0$. Per Induktion kann man leicht zeigen (Übung!), dass diese von der Form

$$f^{(k)}(t) = p_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k}} \text{ für } t > 0 \quad (2.2)$$

sind, wobei p_k ein Polynom ist.

Wir wollen jetzt per Induktion zeigen, dass $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \geq 0$. Für $k = 0$ stimmt das nach Definition. Nehmen wir an, es sei $f^{(k)}(0) = 0$, und betrachten wir $f^{(k+1)}(0)$. Nach Definition und Induktionsannahme ist

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(h) - f^{(k)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(h)}{h}. \quad (2.3)$$

Der linksseitige Limes ist klarerweise 0, der rechtsseitige ist

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} p_k(h) \frac{e^{-1/h}}{h^{2k+1}}. \quad (2.4)$$

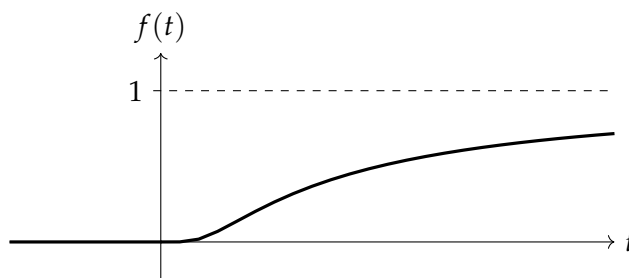


Abbildung 2.1.: Die Funktion f

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h^{2k+1}} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^{-2k-1}}{e^{1/h}} \\
 \text{(l'H\^opital)} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(-2k-1)h^{-2k-2}}{-h^{-2}e^{1/h}} \\
 &= (2k+1) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h^{2k}} \\
 \text{(induktiv)} &= \dots = (2k+1)! \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{-1/h} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

also ist

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} p_k(h) \frac{e^{-1/h}}{h^{2k+1}} = p_k(0) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h^{2k+1}} = 0. \tag{2.6}$$

Damit existiert $f^{(k+1)}(0)$ und ist 0. \square

Damit können wir nun sogenannte *Abschneidefunktionen* konstruieren:

Proposition 2.2 (Existenz von Abschneidefunktionen). Für beliebige reelle Zahlen $r' > r > 0$ gibt es eine glatte Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = 1$ für $t \leq r$, $h(t) \in (0, 1)$ für $t \in (r, r')$ und $h(t) = 0$ für $r \geq r'$.

Beweis. Sei f die Funktion aus der vorigen Proposition. Wir setzen

$$h(t) := \frac{f(r' - t)}{f(r' - t) + f(t - r)}. \tag{2.7}$$

Der Nenner ist immer positiv: Für $t \leq r < r'$ ist $r' - t > 0$, also $f(r' - t) > 0$, und für $t > r$ ist $t - r > 0$, also $f(t - r) > 0$.

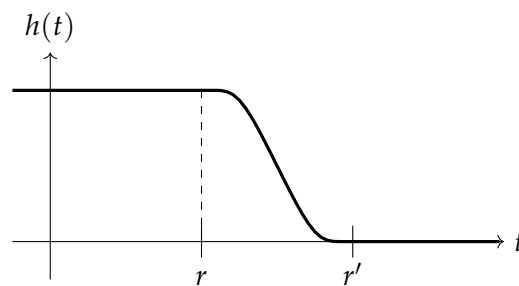


Abbildung 2.2.: Eine Abschneidefunktion h

Da f glatt ist, ist auch h glatt. Für $t \leq r$ ist $f(t-r) = 0$, also $h(t) = 1$; für $t \in (r, r')$ ist sowohl $f(r'-t) > 0$ als auch $f(t-r) > 0$, also $h(t) \in (0, 1)$; und für $t \geq r'$ ist $f(r'-t) = 0$, also $h(t) = 0$. \square

Mit Abschneidefunktionen können wir nun *Hutfunktionen* auf dem \mathbb{R}^n konstruieren, die Werte in $[0, 1]$ annehmen und auf einer gegebenen Kugel konstant 1 sind, außerhalb einer größeren (konzentrischen) aber 0.

Proposition 2.3. Für beliebige reelle Zahlen $r' > r > 0$ gibt es eine glatte Funktion $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Werten in $[0, 1]$, die $H \equiv 1$ auf $\overline{B_r^n(0)}$ und $H \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{r'}^n(0)$ erfüllt und auf $B_{r'}^n(0)$ positiv ist.

Beweis. Wir setzen $H(a) := h(\|a\|)$, wobei h die Abschneidefunktion aus dem vorigen Lemma ist. Die Aussagen über Werte von H gelten nach Konstruktion. Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist die Norm $\|\cdot\|$ glatt, also auch H als Verkettung von glatten Funktionen; da H auf $B_r^n(0)$ konstant 1 ist, ist es auch in 0 glatt. \square

2.1.2. Zerlegungen der Eins

Zunächst brauchen wir ein paar Definitionen.

Definition 2.4. Sei M ein topologischer Raum.

- (a) Der *Träger* einer Funktion $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\text{supp}(\psi) := \overline{\{p \in M: \psi(p) \neq 0\}}$. (Diese Definition ergibt auch Sinn, wenn der Zielbereich von ψ ein Vektorraum oder ein Vektorbündel [oder eine abelsche Gruppe, ...] ist.)
- (b) Eine Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen von M heißt *lokal endlich*, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U gibt, die nur endlich viele der X_i schneidet.

Das, worum es hier gehen soll, sind nun Zerlegungen der Eins:

Definition 2.5. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Eine $\{U_i\}_{i \in I}$ *untergeordnete Zerlegung der Eins* ist eine Familie $\{\psi_i\}_{i \in I}$ von glatten Funktionen $\psi_i \in C^\infty(M)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Die ψ_i nehmen Werte in $[0, 1]$ an.
- (ii) Für jedes $i \in I$ ist $\text{supp}(\psi_i) \subset U_i$.
- (iii) $\{\text{supp}(\psi_i)\}_{i \in I}$ ist lokal endlich.
- (iv) Für alle $p \in M$ ist $\sum_{i \in I} \psi_i(p) = 1$.

Wegen der lokalen Endlichkeit sind in einer Umgebung jedes beliebigen Punktes nur endlich viele der Summanden in (iv) ungleich 0, die Summe existiert also (ohne dass wir uns Gedanken um Konvergenz machen müssen).

Satz 2.6. Zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

Grobe Beweisidee. Wir überdecken die gegebenen offenen Mengen U_i mit kleinen Kartenumgebungen, deren Bilder Kugeln im \mathbb{R}^n sind, und stückeln die ψ_i aus Hutfunktionen auf diesen Kugeln zusammen. Details sind uns hier zu technisch; bei Interesse finden sie sich in Anhang A. \square

2.1.3. Hutfunktionen auf Mannigfaltigkeiten

Jetzt können wir Hutfunktionen konstruieren:

Korollar 2.7 (Hutfunktionen). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, A eine abgeschlossene und $U \supset A$ eine offene Teilmenge von M . Dann gibt es eine Hutfunktion ψ mit $\psi \equiv 1$ auf A und Träger in U , also eine glatte Funktion $\psi \in C^\infty(M)$ mit Werten in $[0, 1]$ mit $\psi \equiv 1$ auf A und $\text{supp}(\psi) \subset U$.

Beweis. Setze $U_0 := U$ und $U_1 := M \setminus A$. Sei $\{\psi_0, \psi_1\}$ eine der offenen Überdeckung $\{U_0, U_1\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Da $\text{supp} \psi_1 \subset U_1$ gilt, verschwindet ψ_1 auf A ; dort gilt also $1 = \psi_0 + \psi_1 = \psi_0$. Außerdem ist $\text{supp}(\psi_0) \subset U$, also ist ψ_0 eine Funktion mit den gesuchten Eigenschaften. \square

Mit Hutfunktionen können wir lokal definierte Funktionen zu globalen Funktionen fortsetzen:

Korollar 2.8 (Fortsetzung lokaler Funktionen). Seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $V \subset U \subset M$ offene Teilmengen mit $\bar{V} \subset U$ und $f \in C^\infty(U)$ eine glatte Funktion. Dann gibt es eine globale Funktion $\tilde{f} \in C^\infty(M)$, die auf V mit f übereinstimmt.

Beweis. Wir wählen eine Hutfunktion $\psi \in C^\infty(M)$ mit Träger in U und $\psi \equiv 1$ auf \bar{V} und definieren

$$\tilde{f} := \begin{cases} f \cdot \psi & \text{auf } U \\ 0 & \text{auf } M \setminus \text{supp}(\psi). \end{cases} \quad (2.8)$$

Auf dem Durchschnitt $U \setminus \text{supp}(\psi)$ der beiden Definitionsbereiche ergeben beide Ausdrücke 0, \tilde{f} ist also wohldefiniert. \square

Die „Anwendung“ eines Tangentialvektors $v \in T_p M$ auf globale glatte Funktionen auf M per Richtungsableitung ist eine lineare Abbildung $\mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto v(f)$, die eine „Produktregel bzgl. p “ erfüllt:

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \quad (2.9)$$

(Für Koordinatenvektoren folgt das aus der Produktregel für partielle Ableitungen, für beliebige Tangentialvektoren dann per Linearität.) Als Anwendung von Hutfunktionen wollen wir zeigen, dass auch umgekehrt jede solche „punktweise Derivation“ von $\mathcal{C}^\infty(M)$ durch einen Tangentialvektor gegeben ist:

Proposition 2.9 (Tangentialvektoren als punktweise Derivationen). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei α eine Derivation von $\mathcal{C}^\infty(M)$ bzgl. p , d. h. eine lineare Abbildung $\alpha: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\alpha(fg) = \alpha(f)g(p) + f(p)\alpha(g) \quad (2.10)$$

für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dann gibt es einen eindeutigen Tangentialvektor $v \in T_p M$ mit $v(f) = \alpha(f)$ für alle globalen Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Beweis. (i) Als ersten Schritt zeigen wir, dass $\alpha(f)$ nur vom lokalen Verhalten von f um p abhängt, d. h. wenn $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ in einer offenen Umgebung U von p übereinstimmen, so ist $\alpha(f) = \alpha(g)$. Um das zu sehen, bemerken wir zuerst, dass $\text{supp}\{f - g\} \subset M \setminus U \subset M \setminus \{p\}$ gilt. Also existiert eine Hutfunktion $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\psi \equiv 1$ auf $\text{supp}\{f - g\}$ und Träger in $M \setminus \{p\}$. Da dann $f - g = (f - g)\psi$ gilt, ist

$$\alpha(f - g) = \alpha((f - g)\psi) = \alpha(f - g) \underbrace{\psi(p)}_{=0} + \underbrace{(f - g)(p)}_{=0} \alpha(\psi) = 0. \quad (2.11)$$

(ii) Als zweiten Schritt zeigen wir, dass α auf konstanten Funktionen verschwindet. Direkt nach der vorausgesetzten Produktregel ist $\alpha(1) = \alpha(1 \cdot 1) = 1\alpha(1) + \alpha(1)1 = 2\alpha(1)$, also $\alpha(1) = 0$; per Linearität ist damit $\alpha(c) = 0$ für $c \in \mathbb{R}$.

(iii) Sei nun $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte für M um p . Wir wählen Fortsetzungen der Koordinatenfunktionen $x^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ zu globalen Funktionen $\tilde{x}^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$, die auf einer offenen Umgebung $V \subset U$ von p mit den x^i übereinstimmen. Entwickeln wir den Tangentialvektor $v \in T_p M$, dessen Existenz und Eindeutigkeit wir zeigen wollen, als $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, so müssen seine Komponenten die Gleichung

$$v^i = v(x^i) = v(\tilde{x}^i) = \alpha(\tilde{x}^i) \quad (2.12)$$

erfüllen. Nach dem ersten Beweisschritt hängen die Zahlen $\alpha(\tilde{x}^i)$ nicht von der Wahl der Fortsetzungen \tilde{x}^i der x^i zu globalen Funktionen ab, wir können also tatsächlich wohldefiniert $v := \alpha(\tilde{x}^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ setzen.

Als letztes müssen wir jetzt noch zeigen, dass tatsächlich für alle $f \in C^\infty(M)$ die Richtungsableitung $v(f)$ in Richtung des so definierten v mit $\alpha(f)$ übereinstimmt. Per Taylor-Entwicklung können wir $f \in C^\infty(M)$ auf U schreiben als

$$f = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - x^i(p)) + g_{ij}(x^i - x^i(p))(x^j - x^j(p)) \quad (2.13)$$

mit glatten Funktionen $g_{ij} \in C^\infty(U)$, die in p verschwinden (das folgt, indem wir den üblichen mehrdimensionalen Satz von Taylor anwenden, um $f \circ x^{-1}$ auf $x(U)$ um den Punkt $x(p)$ zu entwickeln). Indem wir auch diese g_{ij} zu globalen Funktionen $\tilde{g}_{ij} \in C^\infty(M)$ fortsetzen, die auf V mit den g_{ij} übereinstimmen, können wir die global definierte Funktion

$$\tilde{f} := f(p) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(\tilde{x}^i - x^i(p)) + \tilde{g}_{ij}(\tilde{x}^i - x^i(p))(\tilde{x}^j - x^j(p)) \quad (2.14)$$

definieren, die auf V mit f übereinstimmt (beachte, dass $x^i(p)$ und $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ Konstanten sind). Damit erhalten wir, indem wir die Linearität, die Produktregel und das Verschwinden von α auf Konstanten benutzen,

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \alpha(\tilde{f}) \\ &= \alpha \left(f(p) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(\tilde{x}^i - x^i(p)) + \tilde{g}_{ij}(\tilde{x}^i - x^i(p))(\tilde{x}^j - x^j(p)) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\alpha(\tilde{x}^i) + \alpha(\tilde{g}_{ij})(\tilde{x}^i(p) - x^i(p))(\tilde{x}^j(p) - x^j(p)) \\ &\quad + \underbrace{\tilde{g}_{ij}(p)}_{=0} \alpha((\tilde{x}^i - x^i(p))(\tilde{x}^j - x^j(p))) \\ &= \alpha(\tilde{x}^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\ &= v(f). \end{aligned} \quad (2.15)$$

□

Bemerkung 2.10. Da eine analytische Funktion, die auf einer offenen Menge verschwindet, überall verschwindet, gibt es keine analytischen Hutfunktionen. Auf analytischen Mannigfaltigkeiten funktioniert daher der vorherige Beweis nicht, und tatsächlich sind auf einer analytischen Mannigfaltigkeit M im Allgemeinen „punktweise Derivationen“ von $C^\omega(M)$ nicht dasselbe wie Tangentialvektoren.

2.2. Vektorfelder

The space in which these forces act may therefore be considered as a magnetic field, and we may study it in the same way as we have already studied the field in the neighbourhood of ordinary magnets, by tracing the course of the lines of magnetic force, and measuring the intensity of the force at every point.

JAMES CLERK MAXWELL
A Treatise on Electricity and Magnetism (1873)

2.2.1. Grundlagen

Definition 2.11. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(a) Das *Tangentialbündel* von M ist

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M, \quad (2.16)$$

die (disjunkte) Vereinigung aller Tangentialräume an M . Die kanonische surjektive Abbildung

$$\pi: TM \rightarrow M, \quad T_p M \ni v \mapsto p, \quad (2.17)$$

die jedem Tangentialvektor seinen Basispunkt, an dem er „lebt“, zuordnet, heißt die kanonische *Projektion* des Tangentialbündels.

(b) Ein *Vektorfeld* auf M ist eine Abbildung $X: M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ X = \text{id}_M$, also mit $X(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$. Statt $X(p)$ schreiben wir im Folgenden meist X_p .

Ein Vektorfeld ordnet also jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit einen Vektor im entsprechenden Tangentialraum zu.

Konstruktion 2.12. Man kann Vektorfelder in offensichtlicher Weise mit Funktionen multiplizieren und zueinander addieren: Für $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ und Vektorfelder X, Y auf M definiert man das Vektorfeld $fX + gY$ durch $(fX + gY)|_p := f(p)X|_p + g(p)Y|_p$. Mit diesen Operationen wird die Menge der Vektorfelder auf M zu einem Modul über dem Ring der reellwertigen Funktionen auf M .

Beispiel 2.13. Sei $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte von M . Die Abbildungen

$$\frac{\partial}{\partial x^i}: p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad i = 1, \dots, n = \dim M \quad (2.18)$$

sind lokal definierte Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}: U \rightarrow TU$, die von der Karte x induzierten *Koordinatenvektorfelder*.

Definition 2.14. Ist X ein Vektorfeld auf M und $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte für M , so lässt sich X lokal schreiben als

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.19)$$

mit Funktionen $X^i: U \rightarrow \mathbb{R}$, denn an jedem Punkt $p \in U$ können wir $X|_p \in T_p M$ in der Koordinatenbasis entwickeln. X heißt *glatt*, wenn für jede Karte von M die entsprechenden lokalen Komponentenfunktionen glatte Funktionen sind.

Den Raum der glatten Vektorfelder auf M schreiben wir als $\mathfrak{X}(M)$. Er ist ein $C^\infty(M)$ -Modul.

Bemerkung 2.15. (a) Weil nach der Transformationsformel für Tangentialvektoren (Proposition 1.31) die Basiswechsellmatrix zwischen Koordinatenbasen glatt vom Punkt abhängt, ist die Glattheit der Komponentenfunktionen eines Vektorfelds X unabhängig von der Wahl der Karte. Äquivalent kann in der Definition von glatten Vektorfeldern also auch gefordert werden, dass es für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte gibt, bzgl. derer die Komponentenfunktionen glatt sind.

(b) Man kann dem Tangentialbündel TM auf natürliche Weise die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit geben, sodass die glatten Vektorfelder auf M genau die Vektorfelder sind, die als Abbildungen $M \rightarrow TM$ glatt sind: Aus jeder Karte x für M erhalten wir eine Karte für TM , die gemäß $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \mapsto (x(p), (v^1, \dots, v^n)) \in \mathbb{R}^{2n}$ abbildet. Das Tangentialbündel TM zusammen mit der Projektion $\pi: TM \rightarrow M$ ist dann ein Beispiel für ein sogenanntes *Vektorbündel* über M . Die allgemeine Theorie von Vektorbündeln ist aber zu viel für diesen Kurs, deshalb gibt es hier dazu keine weiteren Details.

Konstruktion 2.16 (Fortsetzung lokaler Vektorfelder). Sind $V \subset U \subset M$ offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit M mit $\bar{V} \subset U$ und ist $X \in \mathfrak{X}(U)$ ein lokal definiertes glattes Vektorfeld, dann können wir X zu einem *globalen* Vektorfeld $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ fortsetzen, das auf V mit f übereinstimmt: Völlig analog zur Konstruktion für glatte Funktionen (Korollar 2.8) wählen wir eine Hutfunktion $\psi \in C^\infty(M)$ mit Träger in U und $\psi \equiv 1$ auf \bar{V} und definieren

$$\tilde{X} := \begin{cases} \psi \cdot X & \text{auf } U \\ 0 & \text{auf } M \setminus \text{supp}(\psi). \end{cases} \quad (2.20)$$

Bemerkung 2.17. Nicht auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es (global definierte) Vektorfelder, die nirgends verschwinden: Ein topologisches Resultat, der *Satz vom gekämmten Igel*, besagt, dass auf der Sphäre S^n genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld existiert, wenn n ungerade ist.

Konstruktion 2.18. Ein Vektorfeld $X: M \rightarrow TM$ kann man auf eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ anwenden: Man erhält eine Funktion $X(f)$ durch $(X(f))(p) := X_p(f)$. Man nennt $X(f)$ die *Ableitung von f in Richtung von X* (weil sie eben punktweise genau das ist).

Ist X glatt, dann ist diese Ableitung auch glatt, denn in Koordinaten gilt einfach $X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Man kann glatte Vektorfelder also als \mathbb{R} -lineare Abbildungen $X: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ auffassen. Aufgrund der Produktregel für Tangentialvektoren erfüllen Vektorfelder die Produktregel

$$X(fg) = X(f)g + fX(g). \quad (2.21)$$

Umgekehrt lassen sich Vektorfelder (auf glatten Mannigfaltigkeiten) auch äquivalent als (globale) Derivationen von $\mathcal{C}^\infty(M)$ charakterisieren:

Satz 2.19 (Vektorfelder als globale Derivationen von $\mathcal{C}^\infty(M)$). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ist $F: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ eine (globale) Derivation, d. h. eine \mathbb{R} -lineare Abbildung, die $F(fg) = F(f)g + fF(g)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ erfüllt, so gibt es ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $F(f) = X(f)$.

Beweis. Für jeden Punkt $p \in M$ soll $(F(fg))(p) = (F(f)(p))g(p) + f(p)(F(g))(p)$ gelten. Da die Abbildung $\mathcal{C}^\infty(M) \ni f \mapsto (F(f))(p) \in \mathbb{R}$ außerdem \mathbb{R} -linear ist, gibt es nach Proposition 2.9 also einen eindeutigen Tangentialvektor $X_p \in T_p M$ mit $(F(f))(p) = X_p(f)$.

Wir müssen nur noch zeigen, dass das so definierte Vektorfeld $X: M \rightarrow TM$ glatt ist. Schreiben wir dazu bzgl. einer Karte $x: U \rightarrow x(U)$ das Vektorfeld lokal als $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, so müssen wir zeigen, dass die Funktionen $X^i: U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt sind. Sei dafür $p \in U$. Wir wählen Funktionen $\tilde{x}^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$, die in einer offenen Umgebung V von p mit den Koordinatenfunktionen x^i übereinstimmen. Für $q \in V$ ist dann $X^i(q) = X^j(q)\delta_j^i = X^j(q)\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(q) = X^j(q)\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(q) = X_q(\tilde{x}^i)$, d. h. auf V stimmt X^i mit $X(\tilde{x}^i) = F(\tilde{x}^i)$ überein. Letzteres ist aber eine glatte Funktion auf ganz M , also ist X^i glatt auf V . Da p beliebig war, ist damit X^i glatt auf U . \square

Der letzte Teil des vorherigen Beweises zeigt außerdem:

Korollar 2.20. Ist $X: M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld auf M , sodass $X(f)$ für jede glatte Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ wieder glatt ist, so ist X glatt. \square

2.2.2. Der Kommutator

Definition 2.21. Für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definiert man den *Kommutator* $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ als das Vektorfeld, das auf glatten Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ wirkt als

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)). \quad (2.22)$$

Lemma 2.22. $[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$ definiert tatsächlich eine Derivation von $C^\infty(M)$ und damit ein Vektorfeld.

Beweis. Übung. (Tipp: Direktes Nachrechnen.) □

Später werden wir eine geometrische Interpretation des Kommutators kennenlernen.

Proposition 2.23 (Eigenschaften des Kommutators). Der Kommutator von Vektorfeldern erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(a) $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ist \mathbb{R} -bilinear.

(b) Für beliebige Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (2.23a)$$

(Antisymmetrie).

(c) Für beliebige Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (2.23b)$$

(Jacobi-Identität).

(d) Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$ ist $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 2.24. Die Eigenschaften (a), (b) und (c) besagen, dass $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$ eine sogenannte *Lie-Algebra* über \mathbb{R} ist.

Proposition 2.25 (Kommutator in Koordinaten). Sei x eine Karte von M .

(a) Für die Koordinatenvektorfelder gilt

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0. \quad (2.24)$$

(b) Für $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ist

$$[X, Y] = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.25)$$

Beweis. Dass von derselben Karte induzierte Koordinatenvektorfelder kommutieren, folgt aus dem Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen); die Koordinatenformel folgt dann mit Proposition 2.23 (d). □

2.3. Einsformen

In völliger Analogie zu den Tangentialräumen können wir auch alle Kotangentialräume an eine Mannigfaltigkeit zusammenfassen und Abbildungen betrachten, die jedem Punkt ein Element des entsprechenden Kotangentialraums zuordnen.

Definition 2.26. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(a) Das *Kotangentialbündel* von M ist

$$T^*M := \coprod_{p \in M} T_p^*M, \quad (2.26)$$

die (disjunkte) Vereinigung aller Kotangentialräume an M . Auch hier gibt es eine kanonische Projektion $\pi: T^*M \rightarrow M$, die jedem Kovektor den Punkt, an dem er lebt, zuordnet.

(b) Eine *Einsform* oder *1-Form* auf M , manchmal auch ein *Kovektorfeld* genannt, ist eine Abbildung $\alpha: M \rightarrow T^*M$ mit $\pi \circ \alpha = \text{id}_M$, also mit $\alpha_p \in T_p^*M$ für alle $p \in M$.

Beispiel 2.27. Sei $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte von M . Die Abbildungen

$$dx^i: p \mapsto dx^i|_p, \quad i = 1, \dots, n = \dim M \quad (2.27)$$

sind lokal definierte Einsformen $dx^i: U \rightarrow T^*U$, die von der Karte x induzierten *Koordinaten-Einsformen*. An jedem Punkt $p \in U$ definieren sie nach Proposition 1.36 eine Basis von T_p^*M (nämlich die Dualbasis zur Koordinatenbasis von T_pM).

Definition 2.28. Ist α eine Einsform auf M und $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte für M , so lässt sich α lokal schreiben als

$$\alpha = \alpha_i dx^i \quad (2.28)$$

mit Funktionen $\alpha_i: U \rightarrow \mathbb{R}$. α heißt *glatt*, wenn für jede Karte von M die entsprechenden lokalen Komponentenfunktionen glatte Funktionen sind.

Den Raum der glatten Einsformen auf M schreiben wir als $\Omega^1(M)$. Er ist ein $C^\infty(M)$ -Modul.

Beispiel 2.29. Für eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ ist das Differential

$$df: p \mapsto df|_p \in T_p^*M \quad (2.29)$$

eine glatte Einsform $df \in \Omega^1(M)$.

Konstruktion 2.30. Eine Einsform $\alpha: M \rightarrow T^*M$ kann man auf ein Vektorfeld $X: M \rightarrow TM$ anwenden, indem man dies punktweise tut: Man erhält eine Funktion $\alpha(X): M \rightarrow \mathbb{R}$ durch $(\alpha(X))(p) := \alpha_p(X_p)$. Sind α und X glatt, dann ist auch $\alpha(X)$ glatt, denn in Koordinaten gilt lokal einfach $\alpha(X) = \alpha_i X^i$ für $\alpha = \alpha_i dx^i, X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. (Wegen der Dualität zwischen dx^i und $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sind die Komponentenfunktionen von α also insb. durch $\alpha_i = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ gegeben.)

Eine glatte Einsform α definiert also eine Abbildung $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$. Aufgrund der punktweisen Linearität von α ist diese Abbildung $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear, es gilt also $\alpha(fX + gY) = f\alpha(X) + g\alpha(Y)$ für beliebige glatte Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und glatte Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Hiervon gilt auch die Umkehrung:

Satz 2.31. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Jede $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare Abbildung $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ ist gegeben durch Anwendung einer eindeutig bestimmten Einsform $\alpha \in \Omega^1(M)$.

Beweis. Haben wir eine $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare Abbildung $F: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ gegeben, so wollen wir daraus eine Einsform $\alpha \in \Omega^1(M)$ konstruieren mit $F(X) = \alpha(X)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, und wir wollen sehen, dass diese Einsform eindeutig ist.

Punktweise müssen wir also $\alpha: M \rightarrow T^*M$ implizit durch $(\alpha_p)(X_p) = (F(X))(p)$ definieren. Damit dies α_p eindeutig definiert, müssen wir zeigen, dass wir aus der Abbildung F auch alle Werte $(\alpha_p)(v)$ für $v \in T_pM$ eindeutig bestimmen können. Wir müssen also zeigen, dass sich einerseits jedes $v \in T_pM$ zu einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ fortsetzen lässt mit $X_p = v$ und dass dann andererseits $(F(X))(p)$ von der Wahl dieser Fortsetzung unabhängig ist, also nur von X_p abhängt (und nicht davon, wie X sich außerhalb von p verhält).

Für ersteres sei $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte um p . Wir wählen eine offene Umgebung $V \subset U$ von p , sodass $\bar{V} \subset U$ gilt, und setzen die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$ zu globalen Vektorfeldern $E_i \in \mathfrak{X}(M)$ fort, die auf V mit den $\frac{\partial}{\partial x^i}$ übereinstimmen (Konstruktion 2.16). Jeder Vektor $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_pM$ lässt sich dann fortsetzen zu einem globalen Vektorfeld $X := v^i E_i \in \mathfrak{X}(M)$.

Um zu zeigen, dass $(F(X))(p)$ nur von X_p abhängt, gehen wir in zwei Schritten vor.

- (i) Zunächst zeigen wir, dass $F(X)$ nur lokal von X abhängt, d. h. dass für Vektorfelder X, Y , die auf einer offenen Menge $W \subset M$ übereinstimmen, auf W die Gleichheit $F(X) = F(Y)$ gilt. Dafür sei $q \in W$ beliebig und $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Hutfunktion mit Träger in W mit $\psi(q) = 1$. Dann gilt $\psi \cdot (X - Y) = 0$, woraus

$$0 = F(\psi \cdot (X - Y)) = \psi \cdot F(X - Y) \tag{2.30}$$

folgt, und damit ausgewertet bei q wie gewünscht

$$0 = \psi(q) \cdot (F(X - Y))(q) = (F(X - Y))(q) = (F(X))(q) - (F(Y))(q). \quad (2.31)$$

- (ii) Jetzt können wir zeigen, dass $F(X)$ von X tatsächlich nur punktweise abhängt, dass also aus $X_p = Y_p$ wirklich $(F(X))(p) = (F(Y))(p)$ folgt. Wir schreiben die Differenz $Z = X - Y$ bzgl. der Karte x als $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ auf U . Indem wir die Funktionen $Z^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ zu globalen Funktionen $\tilde{Z}^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ fortsetzen, die auf V mit den Z^i übereinstimmen, gilt damit auf der Umgebung V von p die Gleichheit $Z = \tilde{Z}^i E_i$ von global definierten Vektorfeldern. Wegen der eben gezeigten Lokalität von F gilt auf V damit $F(Z) = F(\tilde{Z}^i E_i) = \tilde{Z}^i F(E_i)$. Ausgewertet bei p erhalten wir wegen $\tilde{Z}^i(p) = Z^i(p) = 0$ also $(F(Z))(p) = 0$.

Die Glattheit von α folgt schließlich durch Anwendung auf lokale Koordinatenvektorfelder: Lokal ist $\alpha = \alpha_i dx^i$ mit $\alpha_i = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \alpha(E_i)|_U = F(E_i)|_U$. \square

3. Alternierende multilineare Algebra

Mathematics is the art of giving the same name to different things.

HENRI POINCARÉ

Definition 3.1. Seien V, W Vektorräume¹ und $k \in \mathbb{N}_0$. Eine *alternierende multilineare Abbildung vom Grad k auf V mit Werten in W* , auch genannt² eine *alternierende k -lineare Abbildung auf V mit Werten in W* , ist eine Abbildung $\alpha: V^k \rightarrow W$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) α ist *multilinear*, d. h. für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, $v_1, \dots, v_k, \tilde{v}_i \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\alpha(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu \tilde{v}_i, \dots, v_k) = \lambda \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \mu \alpha(v_1, \dots, \tilde{v}_i, \dots, v_k). \quad (3.1a)$$

α ist also in jedem Argument linear.

(ii) α ist *alternierend*, d. h. für $v_1, \dots, v_n \in V$ gilt

$$\forall i \neq j: v_i = v_j \implies \alpha(v_1, \dots, v_k) = 0. \quad (3.1b)$$

α verschwindet also, wenn zwei Argumente gleich sind.

Für den Grad schreiben wir $\deg \alpha = k$.

Mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ist die Menge der alternierenden multilinearen Abbildungen $V^k \rightarrow W$ selbst ein Vektorraum.

Weil \mathbb{R} Charakteristik ungleich 2 hat (nämlich 0), ist die Eigenschaft, alternierend zu sein, äquivalent zu *vollständiger Antisymmetrie*, also dazu, dass Vertauschen von zwei Argumenten von α ein Minuszeichen gibt (Übung!):

$$\forall i \neq j: \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \quad (3.2)$$

¹Fast alles in diesem Kapitel funktioniert genauso über beliebigen Körpern (nur bei der Äquivalenz zwischen alternierenden und antisymmetrischen multilinearen Abbildungen und Proposition 3.19 braucht man Einschränkungen an die Charakteristik). Wir beschränken uns trotzdem auf \mathbb{R} -Vektorräume.

²Vor allem, wenn für k eine Vorsilbe existiert, bspw. „bilinear“ für $k = 2$.

3.1. Äußere Potenzen von Vektorräumen

Definition 3.2. Sei V ein Vektorraum und $k \in \mathbb{N}_0$. Die k -te äußere Potenz von V ist ein Vektorraum $\wedge^k V$, der wie folgt konstruiert wird: Wir betrachten den freien Vektorraum W über der Menge V^k , d. h. den (bis auf Isomorphie eindeutigen) Vektorraum mit Basis (!) V^k . Vektoren in W sind also („formale“) Linearkombinationen von Elementen von V^k , und alle Elemente von V^k sind linear unabhängig in W .

Wir definieren die Teilmengen $A_i, B \subset W$ mit $i \in \{1, \dots, k\}$ als

$$A_i := \left\{ (v_1, \dots, \lambda v_i + \mu \tilde{v}_i, \dots, v_k) - \lambda (v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) - \mu (v_1, \dots, \tilde{v}_i, \dots, v_k) \mid v_1, \dots, v_k, \tilde{v}_i \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}, \quad (3.3a)$$

$$B := \left\{ (v_1, \dots, v_k) \in V^k \mid \exists j \neq l : v_j = v_l \right\} \quad (3.3b)$$

und definieren $\wedge^k V$ als den Quotientenraum

$$\wedge^k V := W / \text{span} \left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} A_i \cup B \right). \quad (3.4)$$

Für v_1, \dots, v_k schreiben wir das Bild von $(v_1, \dots, v_k) \in W$ unter der Quotientenprojektion $W \rightarrow \wedge^k V$ (also die Äquivalenzklasse $[(v_1, \dots, v_k)]$) als

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \wedge^k V \quad (3.5)$$

und nennen es das *Dachprodukt* oder das *äußere Produkt* (manchmal auch das *Wedge*- oder *Graßmann-Produkt*) der Vektoren v_1, \dots, v_k .

Bemerkung 3.3. Die Elemente von $\wedge^k V$ sind also Linearkombinationen von „formalen Ausdrücken“ der Form $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ mit $v_i \in V$, d. h.

$$\wedge^k V = \left\{ \sum_{a=1}^N \lambda_a (v_{a,1} \wedge \dots \wedge v_{a,k}) \mid N \in \mathbb{N}_0, \lambda_a \in \mathbb{R}, v_{a,1}, \dots, v_{a,k} \in V \right\}. \quad (3.6)$$

Die formalen Ausdrücke haben dabei genau die folgenden Eigenschaften:

- (i) $v_1 \wedge \dots \wedge (\lambda v_i + \mu \tilde{v}_i) \wedge v_k = \lambda (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) + \mu (v_1 \wedge \dots \wedge \tilde{v}_i \wedge \dots \wedge v_k)$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, $v_1, \dots, v_k, \tilde{v}_i \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- (ii) Für $i \neq j$ mit $v_i = v_j$ gilt $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0$.

Das „genau“ bedeutet dabei, dass zwei Dachprodukte, die nicht mithilfe dieser Eigenschaften ineinander umgeformt werden können, auch wirklich verschieden sind.

Die äußere Potenz $\wedge^k V$ ist also gewissermaßen die „allgemeinst-mögliche“ Art, k Elemente von V alternierend multilinear zu kombinieren: Die Elemente von $\wedge^k V$ sind „alternierende k -lineare Kombinationen“ von Vektoren aus V , und mehr als das gilt auch nicht.

Bemerkung 3.4. Für die „trivialen“ äußeren Potenzen gilt³ $\wedge^0 V = \mathbb{R}$ und $\wedge^1 V = V$.

Nach Konstruktion gilt:

Proposition 3.5. Sei V ein Vektorraum und $k \in \mathbb{N}_0$. Die Abbildung

$$\wedge: V^k \rightarrow \wedge^k V, (v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k \quad (3.7)$$

ist k -linear und alternierend. □

Dass dies die „allgemeinst-mögliche alternierende k -lineare Abbildung“ auf V^k ist, zeigt sich in der folgenden universellen Eigenschaft:

Satz 3.6 (Universelle Eigenschaft der äußeren Potenz). Seien V, W Vektorräume und $k \in \mathbb{N}_0$. Die Abbildung $\wedge: V^k \rightarrow \wedge^k V$ erfüllt die folgende Eigenschaft:

Zu jeder alternierenden k -linearen Abbildung $\alpha: V^k \rightarrow W$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $f_\alpha: \wedge^k V \rightarrow W$ mit $\alpha(v_1, \dots, v_k) = f_\alpha(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)$ für alle $v_1, \dots, v_k \in V$.

$$\begin{array}{ccc} V^k & \xrightarrow{\wedge} & \wedge^k V \\ \alpha \downarrow & \swarrow \exists! f_\alpha & \\ W & & \end{array}$$

Beweis. Da f_α linear sein soll und $f_\alpha(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \alpha(v_1, \dots, v_k)$ gelten soll, muss

$$f_\alpha \left(\sum_{a=1}^N v_{a,1} \wedge \dots \wedge v_{a,k} \right) = \sum_{a=1}^N f_\alpha(v_{a,1} \wedge \dots \wedge v_{a,k}) = \sum_{a=1}^N \alpha(v_{a,1}, \dots, v_{a,k}) \quad (3.8)$$

gelten. Damit ist f_α aber eine wohldefinierte Abbildung $\wedge^k V \rightarrow W$ (Übung!) und tatsächlich linear (Übung!). □

³Genau genommen sind das keine Gleichheiten, sondern kanonische Isomorphismen; wir identifizieren diese Räume aber stillschweigend miteinander.

Anders gesagt kann man also eine lineare Abbildung $f: \bigwedge^k V \rightarrow W$ eindeutig durch $f(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) := \alpha(v_1, \dots, v_k)$ und lineare Fortsetzung definieren, wenn $\alpha(v_1, \dots, v_k)$ ein alternierender k -linearer Ausdruck in den v_i ist.

Bemerkung 3.7. Durch die universelle Eigenschaft ist die äußere Potenz eindeutig festgelegt bis auf eindeutige Isomorphie: Ist $\theta: V^k \rightarrow X$ eine alternierende k -lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass es zu jedem alternierenden k -linearen $\alpha: V^k \rightarrow W$ eine eindeutige lineare Abbildung $f: X \rightarrow W$ mit $\alpha(v_1, \dots, v_k) = f(\theta(v_1, \dots, v_k))$ gibt, so existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\Phi: \bigwedge^k V \rightarrow X$ mit $\Phi \circ \wedge = \theta$.

Definition 3.8. Sei V ein Vektorraum und $k, l \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren die bilineare Abbildung

$$\wedge: \bigwedge^k V \times \bigwedge^l V \rightarrow \bigwedge^{k+l} V, \quad (X, Y) \mapsto X \wedge Y \quad (3.9a)$$

durch

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_l) := v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_l \quad (3.9b)$$

und bilineare Fortsetzung. Für $X \in \bigwedge^k V$ und $Y \in \bigwedge^l V$ heißt $X \wedge Y \in \bigwedge^{k+l} V$ das *Dachprodukt* oder das *äußere Produkt* (manchmal auch das *Wedge-* oder *Graßmann-Produkt*) von X und Y .

Bemerkung 3.9. Die rechte Seite von (3.9b) ist nach den Eigenschaften des Dachprodukts von Vektoren in V tatsächlich k -linear und alternierend in den v_i bzw. l -linear und alternierend in den w_i , sodass wir (nach den universellen Eigenschaften) wirklich eine wohldefinierte Abbildung \wedge bekommen.

Das Dachprodukt mit $\lambda \in \bigwedge^0 V = \mathbb{R}$ ist einfach per Skalarmultiplikation gegeben: für $\alpha \in \bigwedge^k V$ ist $\lambda \wedge \alpha = \alpha \wedge \lambda = \lambda \alpha$.

Proposition 3.10 (Eigenschaften des Dachprodukts). Sei V ein Vektorraum. Das Dachprodukt ist *assoziativ* und *graduieret kommutativ*, d. h. für $X \in \bigwedge^k V, Y \in \bigwedge^l V, Z \in \bigwedge^m V$ gilt

$$(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z), \quad (3.10a)$$

$$X \wedge Y = (-1)^{kl} Y \wedge X. \quad (3.10b)$$

Beweis. Übung. □

Bemerkung 3.11. Der Raum

$$\bigwedge V := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k V \quad (3.11)$$

bildet mit dem Dachprodukt als Multiplikation eine \mathbb{R} -Algebra, die sogenannte *äußere Algebra* oder *Graßmann-Algebra* von V . Sie kann auch direkt über eine universelle Eigenschaft charakterisiert werden: Sie ist die „allgemeinst-mögliche“ unitäre assoziative \mathbb{R} -Algebra A mit einer linearen Abbildung $i: V \rightarrow A$, die $(i(v))^2 = 0$ erfüllt.

Proposition 3.12. Sei V ein Vektorraum und $k \in \mathbb{N}_0$.

- (a) $v_1, \dots, v_k \in V$ sind linear unabhängig $\iff v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$.
- (b) Ist $\{b_i\}_{i \in I}$ eine Basis von V , wobei die Indexmenge I total geordnet ist, dann ist $\{b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_k}\}_{i_1, \dots, i_k \in I, i_1 < \dots < i_k}$ eine Basis von $\wedge^k V$. Insbesondere ist $\dim(\wedge^k V) = \binom{\dim(V)}{k}$.

Beweis. (a) Sind die v_i linear abhängig, lässt sich v_k als Linearkombination von v_1, \dots, v_{k-1} schreiben; damit folgt $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0$.

Seie umgekehrt v_1, \dots, v_k linear unabhängig. Wir ergänzen diese Vektoren zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_k\} \cup \{\tilde{v}_i\}_{i \in I}$ von V und definieren Dualvektoren $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in V^*$ durch

$$\alpha^i(v_j) := \delta_j^i, \quad \alpha^i(\tilde{v}_j) := 0 \quad (3.12)$$

und lineare Fortsetzung. Dann können wir eine lineare Abbildung $f: \wedge^k V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(w_1 \wedge \dots \wedge w_k) := \det \begin{pmatrix} \alpha^1(w_1) & \dots & \alpha^1(w_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^k(w_1) & \dots & \alpha^k(w_k) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

und lineare Fortsetzung definieren, denn die rechte Seite ist alternierend multilinear in den w_i . Nach Konstruktion gilt dann $f(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \det \mathbb{1}_k = 1$; insb. ist $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$.

- (b) Dass die $b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_k}$ ein Erzeugendensystem bilden, ist einfach zu zeigen (Übung!). Um lineare Unabhängigkeit zu zeigen, nehmen wir an, dass eine Linearkombination von verschiedenen Elementen unseres Erzeugendensystems 0 ist,

$$\sum_{a=1}^N \lambda_a b_{i_{a,1}} \wedge \dots \wedge b_{i_{a,k}} = 0, \quad (3.14)$$

und müssen zeigen, dass die λ_a alle 0 sind. Wir wählen ein festes $a \in \{1, \dots, N\}$, und nummerieren die Vektoren b_i , die zwar in unserer Linearkombination auftauchen, aber nicht im a -ten Summanden, als $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_M$. In jedem *anderen* Summanden taucht also (mindestens) eines der \tilde{b}_j auf, im a -ten Summanden keines. Indem

wir das Dachprodukt der Linearkombination mit $\tilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{b}_M$ bilden, erhalten wir so

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{b}_M \wedge \left(\sum_{\hat{a}=1}^N \lambda_{\hat{a}} b_{i_{\hat{a},1}} \wedge \cdots \wedge b_{i_{\hat{a},k}} \right) \\ &= \lambda_a \tilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{b}_M \wedge b_{i_{a,1}} \wedge \cdots \wedge b_{i_{a,k}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Weil die b_i linear unabhängig sind, ist nach Teil (a) damit $\lambda_a = 0$. \square

3.2. Alternierende Multilinearformen

Hier werden wir sehen, dass man Elemente von $\wedge^k V^*$ nicht nur abstrakt als Dachprodukte von k Dualvektoren aus V^* verstehen kann, sondern auch konkret, nämlich als spezielle alternierende k -lineare Abbildungen auf V .

Definition 3.13. Sei V ein Vektorraum und $k \in \mathbb{N}_0$.

- (a) Eine *alternierende k -Linearform auf V* oder auch *alternierende Multilinearform vom Grad k auf V* ist eine alternierende multilineare Abbildung $\alpha: V^k \rightarrow \mathbb{R}$. Den Raum der alternierenden k -Linearformen auf V schreiben wir als $\text{MultAlt}^k(V)$.
- (b) Der *Nullraum* einer alternierenden Multilinearform α auf V ist der Untervektorraum

$$\text{nul}(\alpha) := \{v \in V \mid \alpha(v, \cdot) = 0\} \subset V. \quad (3.16)$$

- (c) Der *Rang* einer alternierenden Multilinearform α auf V (nicht zu verwechseln mit ihrem Grad, also der Anzahl der Argumente) ist⁴

$$\text{rk } \alpha := \dim(V / \text{nul}(\alpha)). \quad (3.17)$$

Beispiel 3.14. Für einen Dualvektor $\alpha \in V^* = \text{MultAlt}^1(V)$, also eine lineare Abbildung $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$, ist $\text{nul}(\alpha) = \ker \alpha$, also nach dem Homomorphiesatz $V / \text{nul}(\alpha) \cong \text{im } \alpha$ und damit $\text{rk } \alpha = \dim \text{im } \alpha$ der übliche Rang von α als lineare Abbildung.

Lemma 3.15. Seien V ein Vektorraum und α, β zwei alternierende Multilinearformen auf V . Dann ist $\text{rk}(\alpha + \beta) \leq \text{rk } \alpha + \text{rk } \beta$.

⁴Wenn ihr mit Quotientenräumen nichts anfangen könnt, lasst euch nicht von der Definition stören. Im endlich-dimensionalen Fall ist einfach $\text{rk } \alpha = \dim V - \dim \text{nul}(\alpha)$ und alle folgenden Beweise zum Rang lassen sich durch Abzählen von Dimensionen durchführen; den unendlich-dimensionalen Fall brauchen wir später gar nicht.

Beweis. Nach Definition ist $\text{nul}(\alpha) \cap \text{nul}(\beta) \subset \text{nul}(\alpha + \beta)$. Wenn wir also zeigen können, dass für drei Unterräume $A, B, C \subset V$ mit $A \cap B \subset C$ die Gleichung $\dim(V/C) \leq \dim(V/A) + \dim(V/B)$ gilt, sind wir fertig.

Nach dem zweiten Isomorphiesatz ist

$$V/C \cong V/(A \cap B) / C/(A \cap B), \quad (3.18)$$

insb. also $\dim(V/C) \leq \dim(V/(A \cap B))$. Wieder nach dem zweiten Isomorphiesatz ist

$$V/A \cong V/(A \cap B) / A/(A \cap B), \quad (3.19)$$

also $\dim(V/A) = \dim(V/(A \cap B)) - \dim(A/(A \cap B))$. Zusammen erhalten wir

$$\dim(V/C) \leq \dim(V/A) + \dim(A/(A \cap B)). \quad (3.20)$$

Nach dem ersten Isomorphiesatz ist nun $A/(A \cap B) \cong (A + B)/B$, woraus wir wegen $A + B \subset V$ also $\dim(A/(A \cap B)) = \dim((A + B)/B) \leq \dim(V/B)$ erhalten. Kombiniert mit (3.20) sind wir fertig. \square

Proposition 3.16. Sei V ein Vektorraum und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine lineare Abbildung

$$\Psi: \bigwedge^k V^* \rightarrow \text{MultAlt}^k(V) \quad (3.21a)$$

über

$$[\Psi(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k)](v_1, \dots, v_k) := \det \begin{pmatrix} \alpha^1(v_1) & \dots & \alpha^1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^k(v_1) & \dots & \alpha^k(v_k) \end{pmatrix} \quad (3.21b)$$

und lineare Fortsetzung. Ψ ist injektiv, und das Bild von Ψ ist die Menge der alternierenden k -Linearformen auf V mit endlichem Rang.

Wir können Elemente von $\bigwedge^k V$ also als alternierende Multilinearformen auf V (mit endlichem Rang) auffassen.

Beweis. Für $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in V^*$ ist

$$V^n \ni (v_1, \dots, v_k) \mapsto \det \begin{pmatrix} \alpha^1(v_1) & \dots & \alpha^1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^k(v_1) & \dots & \alpha^k(v_k) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

wirklich eine alternierende k -Linearform auf V . Außerdem ist dies auch in den α^i alternierend multilinear; also definiert (3.21b) nach der universellen Eigenschaft tatsächlich eine lineare Abbildung $\Psi: \bigwedge^k V^* \rightarrow \text{MultAlt}^k(V)$.

3. Alternierende multilineare Algebra

Direkt nach Definition gilt $\text{nul}(\alpha^1) \cap \dots \cap \text{nul}(\alpha^k) \subset \text{nul}(\Psi(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k))$; wie im Beweis von Lemma 3.15 folgt daraus $\text{rk } \Psi(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k) \leq \text{rk } \alpha^1 + \dots + \text{rk } \alpha^k \leq k$. Damit und mit Lemma 3.15 hat $\Psi(\alpha)$ also endlichen Rang für jedes $\alpha \in \wedge^k V^*$.

Ist umgekehrt $\alpha \in \text{MultAlt}^k(V)$ von endlichem Rang l , so können wir eine Basis $\{b_1, \dots, b_l\}$ für ein Komplement $W \subset V$ von $\text{nul}(\alpha)$ wählen⁵. Wir definieren dann $\eta^1, \dots, \eta^l \in V^*$ durch

$$\eta^i|_{\text{nul}(\alpha)} = 0, \quad \eta^i(b_j) = \delta_j^i \quad (3.23)$$

und lineare Fortsetzung. α lässt sich dann schreiben als

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l} \alpha_{i_1 \dots i_k} \Psi(\eta^{i_1} \wedge \dots \wedge \eta^{i_k}) \in \text{im}(\Psi), \quad (3.24a)$$

wobei die Koeffizienten eindeutig durch

$$\alpha_{i_1 \dots i_k} = \alpha(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \quad (3.24b)$$

gegeben sind (Übung: mache dir klar, dass diese Linearkombination wirklich α ergibt und die Koeffizienten tatsächlich eindeutig bestimmt sind!). Das Bild von Ψ besteht also tatsächlich aus allen alternierenden k -Linearformen mit endlichem Rang, und die Eindeutigkeit der Urbilder zeigt die Injektivität. \square

Korollar 3.17. Ist V endlich-dimensional, dann sind $\wedge^k V^* \equiv \text{MultAlt}^k(V)$ kanonisch isomorph. Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V und $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ die zugehörige Dualbasis von V^* , dann sind für eine alternierende k -Linearform $\alpha \in \text{MultAlt}^k(V)$ die Komponenten in der Entwicklung in der induzierten Basis

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} \Psi(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}), \quad (3.25a)$$

gegeben durch

$$\alpha_{i_1 \dots i_k} = \alpha(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}). \quad (3.25b)$$

\square

Notation 3.18. Im Folgenden fassen wir Elemente von $\wedge^k V^*$ oft direkt als Multilinearformen auf V auf, d. h. wir unterdrücken Ψ und schreiben direkt

$$(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k)(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{pmatrix} \alpha^1(v_1) & \dots & \alpha^1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^k(v_1) & \dots & \alpha^k(v_k) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

⁵Wir nehmen eine Basis von $\text{nul}(\alpha)$ und ergänzen die zu einer Basis von ganz V . Die ergänzten Vektoren induzieren eine Basis von $V / \text{nul}(\alpha)$, sind also l Stück.

Proposition 3.19. Sei V ein Vektorraum. Aufgefasst als Multilinearform ist das Dachprodukt von $\alpha \in \wedge^k V^*$ und $\beta \in \wedge^l V^*$ gegeben durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}). \quad (3.27)$$

Beweis. Wegen Bilinearität des Dachprodukts und Linearität der Identifikation Ψ reicht es aus, die Aussage für den Fall $\alpha = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k$ und $\beta = \beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^l$ mit $\alpha^i, \beta^j \in V^*$ zu beweisen. Mit der Leibniz-Formel für die Determinante erhalten wir

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= (\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \wedge \beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^l)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \alpha^1(v_1) & \dots & \alpha^1(v_{k+l}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^k(v_1) & \dots & \alpha^k(v_{k+l}) \\ \beta^1(v_1) & \dots & \beta^1(v_{k+l}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^l(v_1) & \dots & \beta^l(v_{k+l}) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}) \beta^1(v_{\sigma(k+1)}) \cdots \beta^l(v_{\sigma(k+l)}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Andererseits erhalten wir für die rechte Seite von (3.27) mit der Leibniz-Formel

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S_k} \operatorname{sgn}(\tau) \alpha^1(v_{\sigma(\tau(1))}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(\tau(k))}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\tau \in S_k} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \alpha^1(v_{\sigma\tau(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma\tau(k)}) \beta(v_{\sigma\tau(k+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k+l)}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

wobei wir in kanonischer Weise $\tau \in S_k$ als Element von S_{k+l} aufgefasst⁶ und die Multiplikativität des Signums von Permutationen benutzt haben.

Weil für jedes feste τ die Multiplikation mit τ eine Bijektion von S_{k+l} ist, können wir aber jede Summe über S_{k+l} umschreiben gemäß $\sum_{\sigma \in S_{k+l}} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} f(\sigma\tau^{-1})$ (quasi

⁶ τ ist eine Permutation der natürlichen Zahlen von 1 bis k , also auch eine spezielle Permutation der Zahlen von 1 bis $k+l$.

per „Substitution $\tilde{\sigma} := \sigma\tau$ “⁷). In unserem Fall erhalten wir damit

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\tau \in S_k} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= k! \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}), \end{aligned} \quad (3.30)$$

wobei wir benutzt haben, dass die innere Summe nach dem Umschreiben unabhängig von τ war und wir damit die äußere Summation über τ direkt ausführen konnten.

Durch analoges Vorgehen für den Term mit β (also Anwenden der Leibniz-Formel und Umschreiben der Summe) erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= k! l! \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}) \beta^1(v_{\sigma(k+1)}) \cdots \beta^l(v_{\sigma(k+l)}), \end{aligned} \quad (3.31)$$

was kombiniert mit (3.28) den Beweis abschließt. \square

Bemerkung 3.20. Auf dem Raum $\operatorname{Mult}^k(V)$ der k -Linearformen über V betrachten wir die Abbildung, die eine Multilinearform *vollständig antisymmetrisiert*,

$$\operatorname{Alt}: \operatorname{Mult}^k(V) \rightarrow \operatorname{MultAlt}^k(V), \operatorname{Alt}(\alpha) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \quad (3.32)$$

Ist α schon alternierend, dann ist $\operatorname{Alt}(\alpha) = \alpha$.

Mit dieser Abbildung lässt sich die eben bewiesene Formel (3.27) für das Dachprodukt von alternierenden Multilinearformen schreiben als

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+l)!}{k! l!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta), \quad (3.33)$$

wobei das Tensorprodukt von Multilinearformen durch

$$(\alpha \otimes \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) := \alpha(v_1, \dots, v_k) \beta(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \quad (3.34)$$

gegeben ist.

In der Literatur wird manchmal (aber in der Minderheit) eine andere Konvention für die Identifikation von Elementen von $\wedge^k V^*$ mit alternierenden k -Linearformen gewählt, in der die Determinante der Matrix in (3.21b) noch mit $\frac{1}{k!}$ multipliziert wird. In dieser alternativen Konvention hat dann die obige Formel, in der das Dachprodukt von Multilinearformen durch die Antisymmetrisierungsabbildung ausgedrückt wird, *keinen* expliziten Vorfaktor.

⁷„ $\sigma\tau$, $\sigma\tau$ von Herrn Pastor sin Kau, jau, jau!“

4. Differentialformen

Dinge ändern sich.

DER VOLKSMUND

4.1. Definition und erste Eigenschaften

Definition 4.1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Die k -te äußere Potenz des Kotangentialbündels von M ist

$$\bigwedge^k T^*M := \coprod_{p \in M} \left(\bigwedge^k T_p^*M \right), \quad (4.1)$$

die (disjunkte) Vereinigung der k -ten äußeren Potenzen aller Kotangentialräume an M . Wie beim Tangential- und Kotangentialbündel gibt es auch hier eine kanonische Projektion $\pi: \bigwedge^k T^*M \rightarrow M$, die jedem Element den Punkt, an dem es lebt, zuordnet.

(b) Eine *Differentialform vom Grad k* oder kurz *k -Form* auf M ist eine Abbildung $\alpha: M \rightarrow \bigwedge^k T^*M$ mit $\pi \circ \alpha = \text{id}_M$, also mit $\alpha_p \in \bigwedge^k T_p^*M$ für alle $p \in M$. Für den Grad schreiben wir $\text{deg } \alpha = k$.

Eine k -Form ordnet also jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit eine alternierende k -Linearform auf dem entsprechenden Tangentialraum zu.

Bemerkung 4.2. Für $k = 1$ erhalten wir die uns schon bekannten Einsformen. Für $k = 0$ haben wir an jedem Punkt $\bigwedge^0 T_p^*M = \mathbb{R}$, also $\bigwedge^0 T^*M = M \times \mathbb{R}$; eine 0-Form ist also einfach durch eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Beispiel 4.3. Sei $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte von M . Die Abbildungen

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}: p \mapsto dx^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}|_p, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n = \dim M \quad (4.2)$$

sind lokal definierte k -Formen $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}: U \rightarrow \bigwedge^k T^*U$. An jedem Punkt $p \in U$ definieren sie nach Proposition 3.12 (b) eine Basis von $\bigwedge^k T_p^*M$.

Bemerkung 4.4. Für $k > \dim M$ ist $\dim \wedge^k T_p M = 0$, also $\wedge^k T_p M = 0$ der Nullvektorraum. Es gibt also für $k > \dim M$ keine nichttrivialen (also von 0 verschiedenen) k -Formen.

Definition 4.5. Ist α eine k -Form auf M und $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte für M , so lässt sich α lokal schreiben als

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (4.3)$$

mit Funktionen $\alpha_{i_1 \dots i_k}: U \rightarrow \mathbb{R}$, und $n = \dim M$. α heißt *glatt*, wenn für jede Karte von M die entsprechenden lokalen Komponentenfunktionen glatte Funktionen sind.

Den Raum der glatten k -Formen auf M schreiben wir als $\Omega^k(M)$. Er ist ein $C^\infty(M)$ -Modul.

Bemerkung 4.6. Sind x und \tilde{x} zwei Karten mit überlappendem Definitionsbereich, so gilt für die induzierten Basis- k -Formen nach der Basisentwicklungsformel aus Korollar 3.17

$$\begin{aligned} & (d\tilde{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{i_k})_p \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (d\tilde{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{i_k})_p \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \Big|_p \right) \cdot (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})_p \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}}(p) & \dots & \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{j_k}}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{x}^{i_k}}{\partial x^{j_1}}(p) & \dots & \frac{\partial \tilde{x}^{i_k}}{\partial x^{j_k}}(p) \end{pmatrix} (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})_p. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Damit sind die Komponenten einer Form α im Überlappbereich bzgl. einer Karte genau dann glatt, wenn sie es bzgl. der anderen sind. Äquivalent kann in der Definition von glatten Formen also auch gefordert werden, dass es für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte gibt, bzgl. derer die Komponentenfunktionen glatt sind.

Definition 4.7. Durch punktweise Anwendung können wir das *Dachprodukt* (bzw. *äußeres, Wedge-, Graßmann-Produkt*) von Differentialformen definieren, also

$$\wedge: \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta \quad (4.5a)$$

mit

$$(\alpha \wedge \beta)_p := \alpha_p \wedge \beta_p. \quad (4.5b)$$

Nach der expliziten Formel für das Dachprodukt von alternierenden Multilinearformen (Proposition 3.19) sind die Komponenten von $\alpha \wedge \beta$ Linearkombinationen von Produkten der Komponenten von α und β , also tatsächlich wieder glatt.

Konstruktion 4.8. Genau wie bei Einsformen können wir eine k -Form $\alpha: M \rightarrow \wedge^k T^*M$ auf k Vektorfelder $X_1, \dots, X_k: M \rightarrow TM$ anwenden, indem wir dies punktweise tun: Wir erhalten eine Funktion $\alpha(X_1, \dots, X_k): M \rightarrow \mathbb{R}$ durch $(\alpha(X_1, \dots, X_k))(p) := \alpha_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p)$.

Sind α und die X_i glatt, dann ist auch $\alpha(X_1, \dots, X_k)$ glatt, denn in Koordinaten gilt lokal einfach

$$\alpha(X_1, \dots, X_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k}. \quad (4.6)$$

Wegen der Dualität zwischen dx^i und $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sind die Komponentenfunktionen von α also insb. durch $\alpha_{i_1 \dots i_k} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)$ gegeben.

Eine glatte k -Form $\alpha \in \Omega^k(M)$ definiert also eine alternierende \mathbb{R} -multilineare Abbildung $\mathfrak{X}(M)^k \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$. Aufgrund der punktwisen Multilinearität von α ist diese Abbildung sogar $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinear, d. h. es gilt

$$\alpha(X_1, \dots, fX_i + gY, \dots, X_k) = f\alpha(X_1, \dots, X_k) + g\alpha(X_1, \dots, Y, \dots, X_k) \quad (4.7)$$

für beliebige glatte Vektorfelder $X_i, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und glatte Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Wie bei Einsformen gilt hiervon auch die Umkehrung:

Satz 4.9. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Jede alternierende $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare Abbildung $\mathfrak{X}(M)^k \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ ist gegeben durch Anwendung einer eindeutig bestimmten k -Form $\alpha \in \Omega^k(M)$.

Beweis. Der Beweis funktioniert völlig analog zum Beweis der entsprechenden Aussage für Einsformen (Satz 2.31): Man zeigt ganz genauso, dass der Wert einer solchen multilinearen Abbildung punktweise nur vom Wert der Vektorfelder am entsprechenden Punkt abhängt, sodass man also (durch Fortsetzung von Tangentialvektoren zu Vektorfeldern) an jedem Punkt eine alternierende k -Linearform auf dem Tangentialraum erhält. Durch Anwendung auf global fortgesetzte Koordinatenvektorfelder folgt, dass die resultierende k -Form glatt ist. \square

Definition 4.10. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Das *innere Produkt* von X und α ist

$$X \lrcorner \alpha := \alpha(X, \cdot) \in \Omega^{k-1}(M), \quad (4.8a)$$

also die $(k-1)$ -Form, die durch Einsetzen von X als erstes Argument von α entsteht. Explizit ist also

$$(X \lrcorner \alpha)_p(v_1, \dots, v_{k-1}) = \alpha_p(X_p, v_1, \dots, v_{k-1}) \quad \text{für } v_1, \dots, v_{k-1} \in T_pM. \quad (4.8b)$$

Proposition 4.11. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Das innere Produkt mit X erfüllt eine „graduierte Produktregel“ bzgl. des Dachprodukts: für $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ gilt $X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (X \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (X \lrcorner \beta)$.

Beweis. Es genügt, die Aussage punktweise zu zeigen, also für $X \in V$ und $\alpha \in \wedge^k V^*$, $\beta \in \wedge^l V^*$ für einen Vektorraum V . Wegen Linearität genügt es weiter, den Fall $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$, $\beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_l$ mit $\alpha_i, \beta_i \in V^*$ zu betrachten.

Zunächst zeigen wir, dass allgemein

$$X \lrcorner (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \alpha_i(X) \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha}_i \wedge \cdots \wedge \alpha_k \quad (4.9)$$

gilt, wobei der „Hut“ auf der rechten Seite bedeutet, dass der entsprechende Dualvektor weggelassen wird. Für Vektoren $v_2, \dots, v_k \in V$ ist nämlich

$$\begin{aligned} (X \lrcorner (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k))(v_2, \dots, v_k) &= (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(X, v_2, \dots, v_k) \\ &= \det \begin{pmatrix} \alpha_1(X) & \alpha_1(v_2) & \cdots & \alpha_1(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(X) & \alpha_k(v_2) & \cdots & \alpha_k(v_k) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

woraus per Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte die obige Formel folgt.

Durch Anwendung von (4.9) auf $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_l$ folgt nun direkt die Behauptung. \square

4.2. Die äußere Ableitung

Wir lernen jetzt eine der wichtigsten Operationen auf Differentialformen kennen, wenn nicht gar *die* wichtigste Operation: die sogenannte äußere Ableitung.

Satz 4.12. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Es existiert eine eindeutige Familie von linearen Abbildungen

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U), \quad k \in \mathbb{N}_0, U \subset M \text{ offen} \quad (4.11)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) d ist verträglich mit der Einschränkung auf kleinere offene Mengen, d. h. für $U \subset V \subset M$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \Omega^k(V)$ gilt $d(\alpha|_U) = (d\alpha)|_U$.
- (ii) Auf 0-Formen, also glatten Funktionen, ist d das übliche Differential, d. h. für $f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ und $v \in T_p M$ ist $(df)_p(v) = v(f)$.

(iii) $d \circ d = 0$

(iv) d erfüllt eine „graduierte Produktregel“ bzgl. des Dachprodukts: für $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^l(U)$ gilt $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.

In Koordinaten ist d gegeben durch

$$d \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (4.12)$$

wobei $d\alpha_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} dx^i$ das übliche Differential der Komponentenfunktion ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass ein d mit den geforderten Eigenschaften durch die obige Koordinatenformel gegeben sein muss. Sei also $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte für M . Aufgrund der Linearität genügt es, eine Form $f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(U)$ mit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ zu betrachten. Mit den geforderten Eigenschaften erhalten wir

$$\begin{aligned} d(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= d(f \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ \text{(iv)} &= df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + f d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ \text{(iv iterativ)} &= df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + f (ddx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad \mp \dots + (-1)^{k-1} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge ddx^{i_k}) \\ \text{(ii) und (iii)} &= df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned} \quad (4.13)$$

wie behauptet. Damit ist d auf offenen Mengen, auf denen eine Karte existiert, also eindeutig bestimmt.

Als nächstes zeigen wir, dass die durch die Koordinatenformel gegebenen Abbildungen $d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ tatsächlich die Eigenschaften (ii), (iii) und (iv) erfüllen. Für (ii) ist nichts zu zeigen; (iii) und (iv) lassen sich recht direkt nachrechnen (Übung!).

Für Formen $\alpha \in \Omega^k(V)$ auf beliebigen offenen Mengen $V \subset M$ müssen wir gemäß der Lokalitätseigenschaft (i) d nun wie folgt definieren: wir überdecken V mit offenen Mengen $\{U_i\}_{i \in I}$, auf denen jeweils eine Karte existiert, und setzen

$$(d\alpha)_{U_i} := d(\alpha|_{U_i}), \quad (4.14)$$

wobei die rechte Seite jeweils durch die Koordinatenformel gegeben ist. Damit dies eine wohldefinierte Form $d\alpha \in \Omega^{k+1}(V)$ bestimmt, müssen die Koordinatenausdrücke in den Überlappbereichen $U_i \cap U_j$ der Karten jeweils übereinstimmen. Wenn wir also zeigen können, dass die Koordinatenformel tatsächlich unabhängig von der Wahl der Karte dasselbe Ergebnis liefert, haben wir bewiesen, dass eine Familie d von Abbildungen existiert, die (i) erfüllt und auf jedem Definitionsbereich einer Karte auch

die Eigenschaften (ii), (iii) und (iv). Letztere sind aber lokale Eigenschaften, lassen sich also mithilfe von (i) von den Kartenumgebungen auf d auf beliebigen offenen Mengen übertragen.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass die obige Koordinatenformel unabhängig von der Wahl der Karte dasselbe Ergebnis liefert. Seien dafür x und \tilde{x} zwei Karten auf U . Die durch die Koordinatenformel bzgl. x definierte Abbildung bezeichnen wir mit $d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$, die bzgl. \tilde{x} entsprechend mit \tilde{d} . Wir müssen also $d\alpha = \tilde{d}\alpha$ für $\alpha \in \Omega^k(U)$ zeigen. Aufgrund der Linearität genügt es, den Fall $\alpha = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ zu betrachten. Weil \tilde{d} die Eigenschaft (ii) erfüllt, können wir auch $\alpha = f \tilde{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{i_k}$ schreiben. Mit der Produktregel für \tilde{d} und $\tilde{d} \circ \tilde{d} = 0$ (das haben wir ja oben für die durch die Koordinatenformel gegebene Abbildung bzgl. einer beliebigen Karte gezeigt bzw. als Übung gestellt) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \tilde{d}\alpha &= \tilde{d}f \wedge \tilde{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{i_k} + f \wedge \tilde{d}\tilde{d}x^{i_1} \wedge \tilde{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{i_k} \mp \dots \\ &= \tilde{d}f \wedge \tilde{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{i_k}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Wieder mit Eigenschaft (ii) für \tilde{d} erhalten wir daraus nun $\tilde{d}\alpha = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = d\alpha$ und sind fertig. \square

Definition 4.13. Die durch den vorherigen Satz gegebene Familie von Abbildungen d heißt die *äußere Ableitung* (oder auch *Cartan-Ableitung*) von Differentialformen.

Beispiel 4.14. Auf \mathbb{R}^3 mit Standard-Karte $\text{id} = x = (x^1, x^2, x^3)$ betrachten wir die Formen¹ $f = \sin(x^1) \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ und $\alpha = (x^1 + x^2)^2 dx^1 + x^1 dx^3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Deren äußere Ableitungen sind $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 = \cos(x^1) dx^1$ und $d\alpha = d(x^1 + x^2)^2 \wedge dx^1 + dx^1 \wedge dx^3 = \dots = -2x^2 dx^1 \wedge dx^2 + dx^1 \wedge dx^3$.

Definition 4.15. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

- (a) Wir setzen $\Omega^{-1}(M) := 0$ (der Nullvektorraum) und definieren $d: \Omega^{-1}(M) \rightarrow \Omega^0(M)$ als die Nullabbildung.
- (b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Form $\alpha \in \Omega^k(M)$ heißt *geschlossen*, wenn $d\alpha = 0$. Sie heißt *exakt*, wenn es ein $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ gibt mit $\alpha = d\beta$.
- (c) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Die *k-te de-Rham-Kohomologie* von M ist der Quotientenraum

$$H_{\text{dR}}^k(M) := \ker(d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)) / \text{im}(d: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)) \quad (4.16)$$

von geschlossenen modulo exakten k -Formen.

¹Formal korrekt geschrieben ist natürlich $f = \sin \circ x^1$; allerdings ist obiger „abuse of notation“ sehr üblich, da suggestiv.

Beispiel 4.16. Eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ ist genau dann geschlossen, $df = 0$, wenn alle ihre partiellen Ableitungen verschwinden, wenn sie also lokal konstant ist. Exakt ist nur die Nullfunktion. Damit ist also

$$\begin{aligned} H_{\text{dR}}^0(M) &= \{f \in C^\infty(M) \mid f \text{ lokal konstant}\} / 0 \\ &\cong \{f \in C^\infty(M) \mid f \text{ lokal konstant}\} \\ &\cong \mathbb{R}^{\#\{\text{Zusammenhangskomponenten von } M\}}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

denn lokal konstante Funktionen sind auf jeder Zusammenhangskomponente konstant, und dort können wir ihren Wert jeweils beliebig festlegen.

Satz 4.17 (Poincaré-Lemma). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, d. h. es gibt einen Punkt $x_0 \in U$, sodass für jedes $x \in U$ das Geradenstück von x_0 bis x ganz in U liegt. Für $k > 0$ ist dann $H_{\text{dR}}^k(U) = 0$, d. h. jede geschlossene k -Form auf U ist exakt.

Beweis. Es gibt sehr viele Beweise des Poincaré-Lemmas. Eine Möglichkeit ist, zu gegebenem α mit $d\alpha = 0$ ein bestimmtes β hinzuschreiben, von dem man nachrechnen kann, dass es $\alpha = d\beta$ erfüllt. Das ist aber nicht sehr erhellend. Später im Kurs werden wir mächtigere Methoden zur Verfügung haben, mit denen wir diese Rechnung viel schneller als jetzt durchführen können; außerdem gibt es dann wenigstens eine gewisse Anschauung, wo das β herkommt. Deshalb verschieben wir den Beweis auf später. \square

Bemerkung 4.18. Nach dem Satz von de Rham ist die de-Rham-Kohomologie natürlich isomorph zur singulären Kohomologie mit reellen Koeffizienten,

$$H_{\text{dR}}^k(M) \cong H_{\text{sing}}^k(M, \mathbb{R}). \quad (4.18)$$

Insbesondere ist die de-Rham-Kohomologie, obwohl sie mit „differenzierbaren“ Methoden definiert ist, eine *topologische* Invariante der Mannigfaltigkeit.

Mithilfe des Kommutators lässt sich die äußere Ableitung koordinatenfrei ausdrücken:

Proposition 4.19 (Koordinatenfreie Formel für die äußere Ableitung). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\alpha \in \Omega^k(M)$. Für beliebige $X_1, \dots, X_k, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ ist

$$\begin{aligned} d\alpha(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i(\alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}), \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei die „Hüte“ auf der rechten Seite bedeuten, dass das entsprechende Vektorfeld weggelassen wird.

4. Differentialformen

Beweisidee. Durch explizites Nachrechnen zeigt man, dass die rechte Seite alternierend und $C^\infty(M)$ -multilinear in den X_i ist und somit nach Satz 4.9 eine $(k+1)$ -Form definiert. Durch Anwendung auf Koordinatenvektorfelder zeigt man dann, dass dies tatsächlich $d\alpha$ ist. \square

5. Transport und die Lie-Ableitung

By magnetic curves, I mean the lines of magnetic forces, however modified by the juxtaposition of poles, which would be depicted by iron filings; or those to which a very small magnetic needle would form a tangent.

MICHAEL FARADAY
Experimental Researches in Electricity (1831)

5.1. Transport von Vektorfeldern und Formen

Hat man einen Diffeomorphismus $\phi: M \rightarrow N$, dann kann man damit Vektorfelder von M nach N „transportieren“:

Definition 5.1. Sei $\phi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Der *Pushforward* von X entlang von ϕ ist das Vektorfeld $\phi_*X \in \mathfrak{X}(N)$ definiert durch

$$(\phi_*X)_q := D\phi|_{\phi^{-1}(q)}(X_{\phi^{-1}(q)}) \quad \text{für } q \in N \quad (5.1a)$$

bzw.

$$(\phi_*X)_{\phi(p)} = D\phi|_p(X_p) \quad \text{für } p \in M. \quad (5.1b)$$

Man tut also das Einzige, was man sinnvoll tun kann, um mithilfe von ϕ aus X ein Vektorfeld auf N zu erhalten: Man bildet die entsprechenden Tangentialvektoren mit dem Differential von ϕ von M nach N ab. (Dass der Pushforward tatsächlich wieder glatt ist, folgt aus seiner Koordinatendarstellung, die wir später sehen werden.)

In die andere Richtung funktioniert das natürlich auch:

Definition 5.2. Der *Pullback* von $Y \in \mathfrak{X}(N)$ entlang von $\phi: M \rightarrow N$ ist $\phi^*Y := (\phi^{-1})_*Y$, also

$$(\phi^*Y)_p := D(\phi^{-1})|_{\phi(p)}(Y_{\phi(p)}) \quad \text{für } p \in M. \quad (5.2)$$

Definition 5.3. Man definiert Pushforward und Pullback auch für glatte Funktionen, und zwar naheliegenderweise als $\phi_*f := f \circ \phi^{-1}$ und $\phi^*g := g \circ \phi$ für einen Diffeomorphismus $\phi: M \rightarrow N$ und $f \in C^\infty(M), g \in C^\infty(N)$.

Proposition 5.4. Für Diffeomorphismen $\phi: M \rightarrow N$, $\psi: N \rightarrow L$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist $(\psi \circ \phi)_* X = \psi_* \phi_* X$.

Beweis. Übung. □

Proposition 5.5. Für einen Diffeomorphismus $\phi: M \rightarrow N$, $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist $\phi_*(fX) = \phi_* f \cdot \phi_* X$. Außerdem ist $\phi_*(X(f)) = (\phi_* X)(\phi_* f)$

Die entsprechenden Formeln gelten natürlich auch für Pullbacks.

Beweis. Übung. □

Proposition 5.6. Für einen Diffeomorphismus $\phi: M \rightarrow N$ und Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $[\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_* [X, Y]$.

Beweis. Für $f \in C^\infty(M)$ ergibt sich mit der vorigen Proposition

$$\begin{aligned} (\phi_* [X, Y])(\phi_* f) &= \phi_* ([X, Y](f)) \\ &= \phi_* (X(Y(f)) - Y(X(f))) \\ &= (\phi_* X)((\phi_* Y)(\phi_* f)) - (\phi_* Y)((\phi_* X)(\phi_* f)) \\ &= [\phi_* X, \phi_* Y](\phi_* f). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Da sich jedes $g \in C^\infty(N)$ als $\phi_* f$ schreiben lässt, gilt also $\phi_* [X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$ als Abbildungen auf $C^\infty(N)$. □

Wir können auch Formen transportieren:

Definition 5.7. Sei $\phi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und $\alpha \in \Omega^k(N)$. Der *Pullback* von α entlang von ϕ ist die k -Form $\phi^* \alpha \in \Omega^k(M)$ definiert durch

$$(\phi^* \alpha)_p(v_1, \dots, v_k) := \alpha_{\phi(p)}(D\phi|_p(v_1), \dots, D\phi|_p(v_k)) \quad \text{für } p \in M, v_1, \dots, v_k \in T_p M. \tag{5.4}$$

Der *Pushforward* von $\beta \in \Omega^k(M)$ entlang von ϕ ist $\phi_* \beta := (\phi^{-1})^* \beta \in \Omega^k(N)$.

Auch hier tun wir also das Einzige, was wir sinnvoll tun können, um mithilfe von ϕ aus α eine Form auf M zu machen.

Proposition 5.8. Für Diffeomorphismen $\phi: M \rightarrow N$, $\psi: N \rightarrow L$ und $\alpha \in \Omega^k(L)$ ist $(\psi \circ \phi)^* \alpha = \phi^* \psi^* \alpha$.

Beweis. Übung. □

Proposition 5.9. Seien $\phi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und $\alpha \in \Omega^k(N)$, $\beta \in \Omega^l(N)$.

- (a) Für $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ ist $(\phi^*\alpha)(X_1, \dots, X_k) = \phi^*(\alpha(\phi_*X_1, \dots, \phi_*X_k))$.
- (b) Der Pullback ist „distributiv“ bzgl. des Dachprodukts: $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$
- (c) Der Pullback vertauscht mit der äußeren Ableitung: $\phi^*(d\alpha) = d(\phi^*\alpha)$

Beweis. Übung. (Tipp: Beweise (c) zunächst für 0-Formen, also glatte Funktionen, und zeige dann damit den allgemeinen Fall unter Benutzung von (b).) \square

Korollar 5.10 (Pushforward und Pullback in Koordinaten). Ist $\phi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, x eine Karte für M und y eine Karte für N , so berechnet sich der Pushforward eines Vektorfelds $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$ entlang von ϕ zu $\phi_*X = (\phi_*X)^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ mit

$$(\phi_*X)^i = \left(X^j \frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j} \right) \circ \phi^{-1}. \quad (5.5)$$

Der Pullback einer Form $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \dim N} \alpha_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k} \in \Omega^k(N)$ entlang von ϕ ist $\phi^*\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq \dim M} (\phi^*\alpha)_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ mit

$$(\phi^*\alpha)_{j_1 \dots j_k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \dim N} (\alpha_{i_1 \dots i_k} \circ \phi) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(y^{i_1} \circ \phi)}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial(y^{i_1} \circ \phi)}{\partial x^{j_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(y^{i_k} \circ \phi)}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial(y^{i_k} \circ \phi)}{\partial x^{j_k}} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Beweis. Wenn wir benutzen, dass die Komponenten durch $(\phi_*X)^i = dy^i(\phi_*X)$ und $(\phi^*\alpha)_{j_1 \dots j_k} = (\phi^*\alpha)(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}})$ gegeben sind, folgen die obigen Formeln durch direkte Rechnung mit den „Rechenregeln“ aus der vorigen Proposition. (Wer möchte, kann das nachrechnen.) \square

Beim Berechnen des Pullbacks von Formen ist es aber meistens einfacher, direkt die Rechenregeln aus der vorigen Proposition zu benutzen.

5.2. Integralkurven und Flüsse

Definition 5.11 (Integralkurven). Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und $p \in M$. Eine *Integralkurve* von X durch p ist eine glatte Kurve $\gamma: I \rightarrow M$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall um 0 ist, mit

$$\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \quad \forall t \in I. \quad (5.7)$$

Direkt aus der Definition ist klar, dass im Parameterbereich „verschobene“ Integralkurven wieder Integralkurven sind:

Proposition 5.12 (Verschobene Integralkurven). Ist $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ Integralkurve von $X \in \mathfrak{X}(M)$ durch $p \in M$, dann ist für $s \in (a, b)$ die durch $\lambda(t) := \gamma(s + t)$ definierte Kurve $\lambda: (a - s, b - s) \rightarrow M$ Integralkurve von X durch $\gamma(s)$. \square

Laufen wir Integralkurven schneller entlang, so sind sie die Integralkurven des entsprechend skalierten Vektorfeldes:

Proposition 5.13. Ist γ Integralkurve von X durch p und $a \in \mathbb{R}$, so definiert $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(at)$ die Integralkurve $\tilde{\gamma}$ von aX durch p .

Beweis. Übung. \square

Lokal existieren Integralkurven immer:

Proposition 5.14 (Lokale Existenz). Durch jeden Punkt p existiert lokal eine Integralkurve von X (d. h. es gibt ein Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$, auf dem eine Integralkurve existiert), und diese ist lokal eindeutig.

Beweis. In Koordinaten x um p schreiben wir $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und führen die Notationen $\eta^i := x^i \circ \gamma$, $\tilde{X}^i := X^i \circ x^{-1}$ ein. Damit lauten die zu lösenden Gleichungen

$$\eta^i(0) = x^i(p), \eta^i(t) = \tilde{X}^i(\eta(t)). \quad (5.8)$$

Dies ist aber eine glatte gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, hat also nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. \square

Integralkurven sind auch global eindeutig:

Proposition 5.15 (Globale Eindeutigkeit). Sind $\gamma: I \rightarrow M$ und $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow M$ Integralkurven von X durch p , so ist $\gamma = \tilde{\gamma}$ auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $I \cap \tilde{I}$.

Beweis. Wir setzen $S := \{t \in I \cap \tilde{I} \mid \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)\} \subset I \cap \tilde{I}$. S ist nichtleer, da $0 \in S$. Nach Definition ist S wegen der Stetigkeit von γ und $\tilde{\gamma}$ abgeschlossen¹. Wenn wir noch zeigen können, dass S offen ist, dann folgt, da $I \cap \tilde{I}$ ein Intervall, also zusammenhängend ist, dass $S = I \cap \tilde{I}$.

Ist $s \in S$, so sind aber in einer Umgebung von $\gamma(s) =: q$ die Kartendarstellungen von sowohl γ als auch $\tilde{\gamma}$ Lösungen derselben gewöhnlichen Differentialgleichung mit demselben Anfangswert $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) = q$; nach der lokalen Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf gibt es also ein offenes Intervall J um s , auf dem sie übereinstimmen. Das heißt aber $J \subset S$; es folgt, dass S offen ist. \square

¹Genauer: Da M hausdorffsch ist, ist die Diagonale $\{(p, p) \mid p \in M\} \subset M \times M$ abgeschlossen. S ist das Urbild der Diagonalen unter der glatten, insb. stetigen Abbildung $(\gamma, \tilde{\gamma}): I \cap \tilde{I} \rightarrow M \times M$ und damit auch abgeschlossen.

Insbesondere können wir jede Integralkurve eindeutig auf ein maximales Existenzintervall fortsetzen. Außerdem schneiden sich verschiedene Integralkurven eines Vektorfeldes nicht.

Oft fasst man die Integralkurven zu einer einzigen Abbildung zusammen:

Definition 5.16 (Fluss). Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld, und sei $I_p \subset \mathbb{R}$ zu jedem $p \in M$ das maximale Existenzintervall der Integralkurve von X durch p . Wir setzen $U := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times I_p \subset M \times \mathbb{R}$. Der Fluss des Vektorfeldes X ist die Abbildung $\Phi^X: U \rightarrow M$, die so definiert ist, dass zu jedem $p \in M$ die Kurve

$$I_p \ni t \mapsto \Phi^X(p, t) \in M \quad (5.9)$$

die maximale Integralkurve von X durch p ist. Φ^X löst also die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \Phi^X(p, t) = X_{\Phi^X(p, t)}, \quad \Phi^X(p, 0) = p \quad (5.10)$$

auf dem maximal möglichen Gebiet.

Oft schreiben wir $\Phi_t^X(p) := \Phi^X(p, t)$.

Satz 5.17 (Eigenschaften von Flüssen). Sei $\Phi: U \rightarrow M$ der Fluss von $X \in \mathfrak{X}(M)$, und seien I_p wie in der vorigen Definition. Dann gilt:

- (i) $U \subset M \times \mathbb{R}$ ist offen und Φ ist glatt.
- (ii) Ist $s \in I_p$, so ist $I_{\Phi(p, s)} = I_p - s = \{t - s \mid t \in I_p\}$.
- (iii) $\Phi(p, 0) = p$ für alle $p \in M$.
- (iv) Ist $t \in I_p$ und $s \in I_{\Phi(p, t)}$, dann ist $t + s \in I_p$ und es gilt $(\Phi_s \circ \Phi_t)(p) = \Phi_{t+s}(p)$.
- (v) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $M_t := \{p \in M \mid (t, p) \in U\}$ eine offene Teilmenge von M , und $\Phi_t(p) = \Phi(p, t)$ definiert einen Diffeomorphismus $\Phi_t: M_t \rightarrow M_{-t}$.

Beweis. (iii) gilt nach Definition; (ii) und (iv) folgen aus der „Verschiebe-Eigenschaft“ von Proposition 5.12 und der Maximalität der Existenzintervalle.

Um (i) zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen folgt, dass es um jeden Punkt der Form $(p, 0) \in U$ eine offene Umgebung V in $M \times \mathbb{R}$ gibt, auf der der Fluss Φ existiert (d.h. $V \subset U$) und glatt ist. Mithilfe von Eigenschaft (iv) kann man diese Umgebungen nun auch zu anderen Punkten (p, t) transportieren; die Details sind ein bisschen technisch und bringen kein Mehrverständnis, deshalb lassen wir sie aus.

Zuletzt zeigen wir noch (v). Offen ist M_t nach Definition. Mit Eigenschaft (ii) gilt $p \in M_t \implies t \in I_p \implies I_{\Phi(p, t)} = I_p - t \xrightarrow{0 \in I_p} -t \in I_{\Phi(p, t)} \implies \Phi(p, t) \in M_{-t}$, also

bildet Φ_t tatsächlich M_t auf M_{-t} ab. Nach (iv) ist nun $\Phi_{-t} \circ \Phi_t = \Phi_0 \stackrel{\text{(iii)}}{=} \text{id}_{M_t}$. Analog folgt $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \text{id}_{M_{-t}}$, also sind Φ_t und Φ_{-t} zueinander inverse Diffeomorphismen. \square

Definition 5.18. Ein Vektorfeld heißt *vollständig*, wenn sich alle seine Integralkurven auf ganz \mathbb{R} als Definitionsbereich fortsetzen lassen.

Bemerkung 5.19. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ vollständig, so ist Φ_t^X für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus $\Phi_t^X: M \rightarrow M$. Wegen $\Phi_0^X = \text{id}_M$ und $\Phi_s^X \circ \Phi_t^X = \Phi_{t+s}^X$ ist also

$$\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), \quad t \mapsto \Phi_t^X \quad (5.11)$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Satz 5.20. Vektorfelder mit kompakten Träger sind vollständig.

Beweis. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\text{supp}(X)$ kompakt. Sei $\Phi: U \rightarrow M$ der Fluss von X . Da U offen ist, gibt es für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U_p \subset M$ und ein $\varepsilon_p > 0$, sodass $U_p \times (-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \subset U$. Für jedes $q \in U_p$ existiert dann also die Integralkurve durch q auf $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$. Da $\text{supp}(X)$ kompakt ist, gibt es endlich viele $p_1, \dots, p_k \in \text{supp}(X)$, sodass $\text{supp}(X) \subset \bigcup_{i=1}^k U_{p_i}$. Wir setzen $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_k}\}$. Für alle $p \in \text{supp}(X)$ existiert damit die Integralkurve durch p auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Für $p \in M \setminus \text{supp}(X)$ ist $X_p = 0$, die Integralkurve durch p also die konstante Kurve $t \mapsto p$, die also auch auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ existiert. Damit existieren also alle Integralkurven von X auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Sei nun $p \in M$, und die Integralkurve γ durch p existiere auf dem Intervall $(a, b) \supset (-\varepsilon, \varepsilon)$. Setze $q := \gamma(b - \frac{\varepsilon}{2})$. $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(b - \frac{\varepsilon}{2} + t)$ definiert dann nach der Verschiebe-Eigenschaft die Integralkurve $\tilde{\gamma}$ durch q auf dem Intervall $(a - b + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$. Nach der obigen Überlegung existiert $\tilde{\gamma}$ aber auch auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kann also auf $(a - b + \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)$ fortgesetzt werden. Indem wir $\tilde{\gamma}$ wieder zurück verschieben, sehen wir also, dass γ auf $(a, b + \frac{\varepsilon}{2})$ existiert. Indem wir dieses Verfahren entsprechend oft wiederholen, können wir damit die obere Grenze des Existenzintervalls von γ zu beliebig großen reellen Zahlen verschieben. Analog zeigt man, dass $\gamma(t)$ für beliebig kleine negative t existiert. \square

5.3. Die Lie-Ableitung

Definition 5.21 (Lie-Ableitung). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und entweder $T \in \mathfrak{X}(M)$ oder $T \in \Omega^k(M)$. Die *Lie-Ableitung von T in Richtung von X* ist $\mathcal{L}_X T \in \mathfrak{X}(M)$ (bzw. $\in \Omega^k(M)$), definiert durch

$$(\mathcal{L}_X T)_p := \left. \frac{d}{dt} (\Phi_t^* T)_p \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^* T)_p - T_p}{t}, \quad (5.12)$$

wobei $\Phi = \Phi^X$ der Fluss von X ist. Dabei ist $t \mapsto (\Phi_t^* T)_p \in T_p M$ (bzw. $\in \wedge^k T_p^* M$) einfach eine Abbildung von \mathbb{R} in einen Vektorraum, von der wir die übliche Ableitung nehmen.

Anschaulich gesprochen berechnet $\mathcal{L}_X T$ also, wie sehr sich das geometrische Objekt T ändert, wenn wir uns „infinitesimal“ in Richtung von X fließen lassen.

Lokal um jeden Punkt $p \in M$ ist Φ_t für genügend kleines t ein Diffeomorphismus, der Pullback existiert also und die Definition ergibt Sinn. Die Glattheit von $\mathcal{L}_X T$ folgt, da T und der Fluss von X glatt sind.

Bemerkung 5.22. (a) Ist $\Phi = \Phi^X$ der Fluss von X und $a \in \mathbb{R}$, so ist der Fluss von aX durch $\Phi^{aX}(p, t) = \Phi(p, at)$ gegeben, und folglich ist $\frac{d}{dt}(\Phi_{at}^* T)_p|_{t=0} = (\mathcal{L}_{aX} T)_p$. Andererseits ist nach Kettenregel $\frac{d}{dt}(\Phi_{at}^* T)_p|_{t=0} = a \frac{d}{dt}(\Phi_t^* T)_p|_{t=0} = a(\mathcal{L}_X T)_p$. Also gilt $\mathcal{L}_{aX} T = a\mathcal{L}_X T$.

(b) Nach Definition ist $\mathcal{L}_X T = \frac{d}{dt} \Phi_t^* T|_{t=0}$ (verstanden als übliche Ableitung einer Kurve im Vektorraum $\mathfrak{X}(M)$ bzw. $\Omega^k(U)$). Daraus folgt allgemeiner

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Phi_s^* T &= \frac{d}{dt} \Phi_{s+t}^* T \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\Phi_t \circ \Phi_s)^* T \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Phi_s^* \Phi_t^* T \Big|_{t=0} \\ &= \Phi_s^* \left(\frac{d}{dt} \Phi_t^* T \Big|_{t=0} \right) = \Phi_s^* \mathcal{L}_X T \end{aligned} \quad (5.13)$$

auf jeder offenen Menge $U \subset M$, auf der Φ_s existiert, wobei wir beim vorletzten Gleichheitszeichen die Linearität von Φ_s^* benutzt haben. Außerdem gilt $\frac{d}{ds} \Phi_s^* T = \frac{d}{dt} \Phi_t^* \Phi_s^* T|_{t=0} = \mathcal{L}_X \Phi_s^* T$. Damit erhalten wir auch

$$\mathcal{L}_X \Phi_s^* T = \Phi_s^* \mathcal{L}_X T. \quad (5.14)$$

Proposition 5.23. Für eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ ist $\mathcal{L}_X f = X(f)$ die übliche Ableitung.

Beweis. Sei Φ der Fluss von X . Es ist $(\mathcal{L}_X f)(p) = \frac{d}{dt}(\Phi_t^* f)(p)|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\Phi_t(p))|_{t=0} = df|_p \left(\frac{d}{dt} \Phi_t(p) \Big|_{t=0} \right) = df|_p (X_p) = X_p(f)$ nach Kettenregel. \square

Lemma 5.24. Seien $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\alpha \in \Omega^k(N)$, $\beta \in \Omega^l(N)$.

(a) Die Lie-Ableitung erfüllt eine Produktregel bzgl. des Dachprodukts: $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)$

(b) Die Lie-Ableitung vertauscht mit der äußeren Ableitung: $\mathcal{L}_X(d\alpha) = d(\mathcal{L}_X \alpha)$

Beweis. Übung. (Tipp: Benutze die entsprechenden Eigenschaften des Pullbacks aus Proposition 5.9.) \square

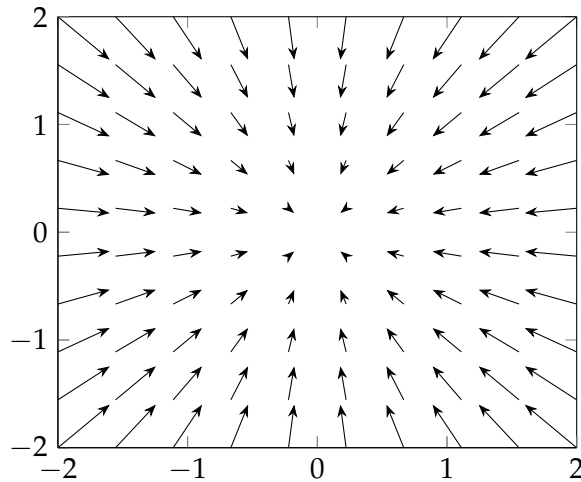


Abbildung 5.1.: Das Vektorfeld X aus dem Beweis des Poincaré-Lemmas

Die Lie-Ableitung von Formen lässt sich vollständig auf die äußere Ableitung zurückführen. Dies ist eines der wichtigsten Resultate in der Theorie der Differentialformen.

Satz 5.25 (Cartans magische Formel). Die Lie-Ableitung von $\alpha \in \Omega^k(M)$ in Richtung von $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_X \alpha = X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha). \quad (5.15)$$

Beweis. Übung. (Tipp: Induktion über den Grad von α . Für den Induktionsschritt schreibe $\alpha = \sum_i f_i d\beta_i$ (warum geht das?) und benutze das vorige Lemma sowie die Produktregel für das innere Produkt (Proposition 4.11)!) \square

Mithilfe der Lie-Ableitung und der Cartan-Formel können wir nun recht elegant das Poincaré-Lemma (Satz 4.17) beweisen:

Beweis des Poincaré-Lemmas. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. oBdA nehmen wir an, dass U sternförmig bzgl. 0 ist. Auf U betrachten wir das radial nach innen zeigende Vektorfeld $X := -x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, wobei $x = \text{id}_U$ die Standardkarte auf U ist (siehe Abbildung 5.1). Der Fluss Φ von X ist gegeben durch $\Phi_t(x) = e^{-t}x$, denn es ist $\Phi_0(x) = x$ und $\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = \frac{d(\Phi_t(x))^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\Phi_t(x)} = -(\Phi_t(x))^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\Phi_t(x)} = X_{\Phi_t(x)}$. Entlang von X fließen also Punkte im \mathbb{R}^n auf Geraden zum Ursprung, „mit exponentiell abfallender Geschwindigkeit“. Weil U sternförmig bzgl. 0 ist, bildet der Fluss Φ_t für jedes $t \in \mathbb{R}$ damit U auf U ab. Nach Bemerkung 5.22 (b) gilt damit $\frac{d}{dt}\Phi_t^* \alpha = \mathcal{L}_X \Phi_t^* \alpha$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \Omega^k(U)$.

Weil Φ_t für $t \rightarrow \infty$ alle Punkte in U auf den Ursprung abbildet, dabei aber glatt ist, werden für $t \rightarrow \infty$ beliebige Tangentialvektoren durch Φ_t auf 0 abgebildet: für beliebige glatte Kurven γ in U ist $\tilde{\gamma} := \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t \circ \gamma$ die konstante Kurve $\tilde{\gamma}(s) = 0$, also $\lim_{t \rightarrow \infty} D\Phi_t|_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{ds}(\Phi_t \circ \gamma)(s)|_{s=0} = \frac{d}{ds} \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi_t \circ \gamma)(s)|_{s=0} = \dot{\tilde{\gamma}}(0) = 0$. Für eine beliebige Form $\alpha \in \Omega^k(U)$ mit $k \geq 1$ und $v_1, \dots, v_k \in T_x U$ folgt daraus $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi_t^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{\Phi_t(x)}(D\Phi_t|_x(v_1), \dots, D\Phi_t|_x(v_k)) = \alpha_0(0, \dots, 0) = 0$, also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^* \alpha = 0 \quad \text{für } \alpha \in \Omega^k(U), k \geq 1. \quad (5.16)$$

Jetzt definieren wir eine lineare Abbildung $h: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(U)$ durch

$$h(\alpha) := - \int_0^\infty \Phi_t^* \alpha \, dt. \quad (5.17)$$

Wir möchten jetzt zeigen, dass wir in diesem Ausdruck Ableitungen bzgl. x^i mit der Integration bzgl. t vertauschen können. Wegen der Linearität des Integrals reicht es, den Fall $\alpha = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ zu betrachten. Mit $\Phi_t(x) = e^{-t}x$ erhalten wir direkt

$$\begin{aligned} \Phi_t^*(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= (f \circ \Phi_t) d(x^{i_1} \circ \Phi_t) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ \Phi_t) \\ &= e^{-kt} (f \circ \Phi_t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$, die auch bzgl. 0 sternförmig ist, und $p \in K$ ist nun aber $|e^{-kt} \frac{\partial(f \circ \Phi_t)}{\partial x^i}(p)| = |e^{-(k+1)t} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\Phi_t(p))| \leq C e^{-(k+1)t}$, wobei C das Maximum der Beträge der ersten partiellen Ableitungen von f über K ist. Weil $e^{-(k+1)t}$ bzgl. t über $(0, \infty)$ integrierbar ist, haben wir also eine integrierbare Majorante für alle partiellen Ableitungen gefunden und können den Satz über Differenzierbarkeit unter dem Integral anwenden. Wir können also auf K tatsächlich Ableitungen erster Ordnung bzgl. x mit dem Integral in der Definition von h vertauschen. Da es um jeden Punkt $p \in U$ eine solche kompakte Menge K gibt, gilt das auf ganz U .

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir nun

$$\mathcal{L}_X(h(\alpha)) = - \int_0^\infty \mathcal{L}_X \Phi_t^* \alpha \, dt = - \int_0^\infty \frac{d}{dt}(\Phi_t^* \alpha) \, dt = \alpha - \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^* \alpha = \alpha. \quad (5.19)$$

Außerdem gilt

$$d(h(\alpha)) = - \int_0^\infty d(\Phi_t^* \alpha) \, dt = - \int_0^\infty \Phi_t^* d\alpha \, dt = h(d\alpha), \quad (5.20)$$

die äußere Ableitung kommutiert also mit h . Mit Cartans magischer Formel erhalten wir damit

$$\alpha = \mathcal{L}_X(h(\alpha)) = X \lrcorner d(h(\alpha)) + d(X \lrcorner h(\alpha)) = X \lrcorner h(d\alpha) + d(X \lrcorner h(\alpha)). \quad (5.21)$$

Im Fall $d\alpha = 0$ ist also $\alpha = d(X \lrcorner h(\alpha))$ exakt und wir sind fertig. \square

Proposition 5.26. Für ein Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ der Kommutator.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass für eine beliebige glatte Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung von 0, nach Kettenregel $\frac{d}{dt}F(t, t) = (\partial_1 F)(t, t) + (\partial_2 F)(t, t)$ gilt, insbesondere also

$$\left. \frac{d}{dt}F(t, t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}F(t, 0) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt}F(0, t) \right|_{t=0}. \quad (5.22)$$

Sei nun Φ der Fluss von X . Für jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $p \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_p(f) &= \left(\left. \frac{d}{dt}(\Phi_t^* Y)_p \right|_{t=0} \right) (f) \\ &= df|_p \left(\left. \frac{d}{dt}(\Phi_t^* Y)_p \right|_{t=0} \right) \\ (df|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}) &= \left. \frac{d}{dt} df|_p \left((\Phi_t^* Y)_p \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left((\Phi_t^* Y)(f) \right) (p) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left((\Phi_t^* Y)(\Phi_t^* \Phi_{-t}^* f) \right) (p) \right|_{t=0} \\ (\text{Prop. 5.5}) &= \left. \frac{d}{dt} \left(\Phi_t^* \left(Y(\Phi_{-t}^* f) \right) \right) (p) \right|_{t=0} \\ ((5.22) \text{ und } \Phi_0 = \text{id}_M) &= \left. \frac{d}{dt} \left(\Phi_t^* \left(Y(f) \right) \right) (p) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} \left(Y(\Phi_{-t}^* f) \right) (p) \right|_{t=0} \\ (\text{Satz von Schwarz}) &= \left(\mathcal{L}_X \left(Y(f) \right) \right) (p) + \left(Y \left(\left. \frac{d}{dt} \Phi_{-t}^* f \right|_{t=0} \right) \right) (p) \\ &= \left(\mathcal{L}_X \left(Y(f) \right) \right) (p) + \left(Y \left(-\mathcal{L}_X f \right) \right) (p) \\ (\text{Prop. 5.23}) &= \left(X(Y(f)) - Y(X(f)) \right) (p) = \left([X, Y](f) \right) (p) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Damit ist $(\mathcal{L}_X Y)(f) = [X, Y](f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, also $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$. \square

Dies gibt uns eine geometrische Interpretation des Vektorfeld-Kommutators: $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$ gibt an, wie sehr sich Y ändert, wenn wir es entlang von X fließen lassen.

6. Integration auf Mannigfaltigkeiten

If you draw a loop around something, you can tell how much swirly is in it.

ZACH WEINERSMITH
Saturday Morning Breakfast Cereal (2014-02-24)

6.1. Orientierbarkeit

Definition 6.1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $\dim M > 0$.

- (a) Ein *orientierter Atlas* für M ist eine Menge von Karten von M , die M überdecken und für die die Jacobi-Determinante aller Kartenwechsel positiv ist, also eine Menge von Karten $\{x_i: U_i \rightarrow x_i(U_i) \mid i \in I\}$ mit $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ und

$$\forall i, j \in I \forall a \in x_j(U_i \cap U_j) : \det J(x_i \circ x_j^{-1})|_a > 0. \quad (6.1)$$

- (b) M heißt *orientierbar*, wenn ein orientierter Atlas für M existiert.
- (c) Ein *maximaler orientierter Atlas* für M ist ein orientierter Atlas \mathcal{A} , der schon alle Karten von M enthält, deren Kartenwechsel zu Karten aus \mathcal{A} positive Jacobi-Determinante hat, also

$$(x \text{ Karte für } M, \forall y \in \mathcal{A} : \det J(y \circ x^{-1}) > 0) \implies x \in \mathcal{A}. \quad (6.2)$$

- (d) Eine *Orientierung* für eine orientierbare Mannigfaltigkeit M ist eine Wahl eines maximalen orientierten Atlas. Eine Mannigfaltigkeit, für die diese Wahl getroffen wurde, heißt *orientiert*. Karten aus dem gewählten Atlas heißen dann *positiv orientiert*; solche, für die die Jacobi-Determinante des Kartenwechsels zu positiv

orientierten Karten negatives Vorzeichen hat, heißen *negativ orientiert*.¹ Eine geordnete Basis (b_1, \dots, b_n) von $T_p M$ heißt *positiv orientiert*, wenn für eine (und dann jede) positiv orientierte Karte x um p

$$dx^1|_p \wedge \dots \wedge dx^n|_p(b_1, \dots, b_n) > 0 \quad (6.3)$$

ist; andernfalls heißt sie *negativ orientiert*.

Bemerkung 6.2. Eine Orientierung ist also eine global konsistente Festlegung davon, welche Basen des Tangentialraums als positiv orientiert gelten.

Konstruktion 6.3. Ist \mathcal{A} ein orientierter Atlas für M , $x: U \rightarrow x(U)$ eine beliebige Karte für M und $p \in U$, dann hat für jede Karte $y \in \mathcal{A}$ um p die Jacobi-Determinante des Kartenwechsels von x zu y dasselbe Vorzeichen: für zwei Karten $y, \tilde{y} \in \mathcal{A}$ um p gilt nach Kettenregel $0 < \det J(\tilde{y} \circ y^{-1})|_{y(p)} = \det J(\tilde{y} \circ x^{-1} \cdot x \circ y^{-1})|_{y(p)} = \det J(\tilde{y} \circ x^{-1})|_{x(p)} \cdot \det J(x \circ y^{-1})|_{y(p)}$.

Das Vorzeichen der Jacobi-Determinante des Kartenwechsels von x zu beliebigen Karten aus \mathcal{A} definiert also eine stetige Funktion $U \rightarrow \{\pm 1\}$ (die Stetigkeit folgt aus der Glattheit der Jacobi-Matrizen und der Stetigkeit der Determinante).

Proposition 6.4. Sei M eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\dim M > 0$.

- (a) Jeder orientierte Atlas für M ist Teil eines eindeutig bestimmten maximalen orientierten Atlas.
- (b) Ist M orientiert, dann ist jede Karte für M mit (weg-)zusammenhängendem² Definitionsbereich entweder positiv oder negativ orientiert.
- (c) Ist M (weg-)zusammenhängend, dann gibt es genau zwei mögliche Orientierungen für M .

Beweis. (a) Sei \mathcal{A} ein orientierter Atlas für M . Wenn \mathcal{A} Teil eines maximalen orientierten Atlas ist, dann muss dieser durch

$$\mathcal{A}' := \{x \text{ Karte für } M \mid \forall y \in \mathcal{A} : \det J(y \circ x^{-1}) > 0\} \quad (6.4)$$

gegeben sein. Andererseits ist \mathcal{A}' tatsächlich ein orientierter Atlas: Für zwei Karten $x, \tilde{x} \in \mathcal{A}'$ ist das Vorzeichen der Jacobi-Determinanten der Kartenwechsel von x bzw. \tilde{x} zu beliebigen Karten aus \mathcal{A} positiv, nach Kettenregel also auch das Vorzeichen der Jacobi-Determinante des Kartenwechsels von x zu \tilde{x} .

¹Wenn der Definitionsbereich einer Karte nicht zusammenhängend ist, kann sie auch weder positiv noch negativ orientiert sein.

²Eine Mannigfaltigkeit M heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ eine stetige Kurve von p nach q gibt, also eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Für Mannigfaltigkeiten ist das (anders als für allgemeine topologische Räume!) äquivalent dazu, zusammenhängend zu sein.

- (b) Sei $x: U \rightarrow x(U)$ eine Karte für M mit U zusammenhängend und \mathcal{A} ein (maximaler) orientierter Atlas für M . Das Vorzeichen der Jacobi-Matrix des Kartenwechsels von x zu Karten aus \mathcal{A} ist eine stetige Funktion $U \rightarrow \{\pm 1\}$; weil U zusammenhängend ist, muss es also konstant sein. Je nach Vorzeichen ist x damit bzgl. \mathcal{A} positiv bzw. negativ orientiert.
- (c) Sei M zusammenhängend und seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ zwei maximale orientierte Atlanten für M . An jedem Punkt hängt das Vorzeichen der Jacobi-Determinante des Kartenwechsels von einer Karte $x \in \mathcal{A}$ zu einer Karte $y \in \mathcal{A}'$ weder von der Wahl von x noch von y ab. Damit ist das Vorzeichen der Jacobi-Determinante von Kartenwechseln von \mathcal{A} zu \mathcal{A}' also eine wohldefinierte stetige Funktion $M \rightarrow \{\pm 1\}$; weil M zusammenhängend ist, muss es also konstant sein. Die Karten aus \mathcal{A}' sind also bzgl. \mathcal{A} alle entweder positiv oder negativ orientiert, es gilt also entweder $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ oder $\mathcal{A}' = \overline{\mathcal{A}}$ mit

$$\overline{\mathcal{A}} = \{y \text{ Karte für } M \mid y \text{ negativ orientiert bzgl. } \mathcal{A}\}. \quad (6.5)$$

□

Beispiel 6.5. (a) \mathbb{R}^n ist orientierbar; die Standard-Orientierung ist die, die durch den orientierten Atlas $\{\text{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ induziert wird.

- (b) Auf offenen Teilmengen $U \subset M$ einer orientierten Mannigfaltigkeit M induziert die Orientierung von M in natürlicher Weise eine Orientierung: Eine Karte von U ist genau dann positiv orientiert, wenn sie es als Karte von M ist.
- (c) Jede Mannigfaltigkeit, die von zwei Karten überdeckt wird, deren Definitionsbereiche (weg-)zusammenhängenden Schnitt haben, ist orientierbar (Übung!).
- (d) Die Sphären S^n sind orientierbar. Das zeigt man am einfachsten, indem man sie mit zwei Karten überdeckt, deren Überlappbereich zusammenhängend ist, bspw. den stereographischen Projektionen³. Die Standard-Orientierung ist die, bzgl. der die stereographische Projektion bzgl. des Nordpols positiv orientiert ist.
- (e) Das Möbiusband ist *nicht* orientierbar. Das formal zu zeigen ist kompliziert⁴; versuche stattdessen, dir das anschaulich klar zu machen.

Satz 6.6. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn es eine nirgends verschwindende Differentialform maximalen Grades gibt, also

$$\omega \in \Omega^n(M), \forall p \in M : \omega_p \neq 0 \quad (6.6)$$

³Wenn ihr mithilfe dieses Skriptes gelernt habt, was Mannigfaltigkeiten sind, dann kennt ihr die stereographischen Projektionen nicht. Ich erkläre sie an dieser Stelle kurz im Kurs.

⁴Vor allem, wenn man das Möbiusband nicht formal definiert.

mit $n = \dim M > 0$.

Beweis. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ eine nirgends verschwindende Form maximalen Grades. Eine Karte $x: U \rightarrow x(U)$ heißt dann positiv orientiert bzgl. ω , wenn auf U

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) > 0 \quad (6.7a)$$

gilt, oder äquivalent

$$\omega|_U = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \text{ mit } f > 0. \quad (6.7b)$$

Die auf diese Weise definierten positiv orientierten Karten bilden einen (maximalen) orientierten Atlas von M : Einerseits gilt auf dem Schnitt $U \cap V$ der Definitionsbereiche zweier bzgl. ω positiv orientierter Karten $x: U \rightarrow x(U)$ und $\tilde{x}: V \rightarrow \tilde{x}(V)$, indem wir ω wie in (6.7b) schreiben,

$$\begin{aligned} (\det J(x \circ \tilde{x}^{-1})) \circ \tilde{x} &= \det \left(\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \right)_{i,j} \right) \\ &= dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n} \right) \\ &= \frac{1}{f} \cdot \omega \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n} \right) > 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Andererseits gibt es auch um jeden Punkt $p \in M$ eine bzgl. ω positiv orientierte Karte: Weil ω nirgends verschwindet, ist für eine beliebige Karte x um p der Wert $\omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right) \neq 0$, also positiv oder negativ; falls er negativ ist, ersetzen wir x^1 durch $-x^1$ und machen ihn so positiv. Wegen Stetigkeit ist dann $\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) > 0$ auf einer Umgebung von p , also ist x eine bzgl. ω positiv orientierte Karte.

Sei umgekehrt M orientierbar und $\{x_i: U_i \rightarrow x_i(U_i) \mid i \in I\}$ ein orientierter Atlas für M . Für jedes $i \in I$ setzen wir $\omega_i := dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^n \in \Omega^n(U_i)$. Diese lokal definierten n -Formen können wir nun mit einer Zerlegung der Eins zu einer globalen Form „zusammenstückeln“: $\{\psi_i\}_{i \in I}$ sei eine der offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von M untergeordnete Zerlegung der Eins. Wir definieren $\omega := \sum_{i \in I} \psi_i \cdot \omega_i \in \Omega^n(M)$. (Wegen $\text{supp}(\psi_i) \subset U_i$ ergibt diese Summe Sinn.) Wir können nun direkt nachrechnen, dass dieses ω nirgends verschwindet: Um jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Umgebung U , die nur endlich viele der $\text{supp}(\psi_i)$ schneidet; sagen wir für i_1, \dots, i_N . Auf U gilt damit $\omega = \sum_{a=1}^N \psi_{i_a} dx_{i_a}^1 \wedge \dots \wedge dx_{i_a}^n$. Jetzt ist aber jeweils

$$\begin{aligned} dx_{i_a}^1 \wedge \dots \wedge dx_{i_a}^n &= \det \left(\left(\frac{\partial x_{i_a}^j}{\partial x_{i_1}^k} \right)_{j,k} \right) \cdot dx_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge dx_{i_1}^n \\ &= (\det J(x_{i_a} \circ \tilde{x}_{i_1}^{-1})) \circ \tilde{x}_{i_1} \cdot dx_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge dx_{i_1}^n, \end{aligned} \quad (6.9)$$

auf U also

$$\omega = \left(\sum_{a=1}^N \underbrace{\psi_{i_a}}_{\geq 0} \underbrace{(\det J(x_{i_a} \circ \tilde{x}_{i_1}^{-1})) \circ \tilde{x}_{i_1}}_{> 0} \right) dx_{i_1}^1 \wedge \cdots \wedge dx_{i_1}^n. \quad (6.10)$$

Wegen $1 = \sum_{a=1}^N \psi_{i_a}(p)$ ist bei p mindestens eines der ψ_{i_a} ungleich 0; damit ist also $\omega_p \neq 0$. \square

Definition 6.7. Seien M, N orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus $\phi: M \rightarrow N$ heißt *orientierungserhaltend*, wenn seine Kartendarstellung bzgl. positiv orientierter Karten positive Jacobi-Determinante hat. Äquivalent bildet das Differential von ϕ an jedem Punkt positiv orientierte Basen des Tangentialraums auf positiv orientierte Basen ab.

Definition 6.8. Motiviert durch Satz 6.6 definiert man auch Orientierungen für 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten: Eine Orientierung für eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit M , also eine diskrete Menge von Punkten, ist eine Festlegung eines Vorzeichens $\text{sgn}(p) = \pm 1$ für jeden Punkt $p \in M$. Ein Diffeomorphismus 0-dimensionaler orientierter Mannigfaltigkeiten ist genau dann orientierungserhaltend, wenn er die gewählten Vorzeichen erhält.

6.2. Integration von Formen

Wir werden jetzt sehen, wie man n -Formen auf einer n -dimensionalen orientierten Mannigfaltigkeit integrieren kann.

Definition 6.9. Sei M eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $\dim M = n > 0$, $x: U \rightarrow x(U)$ eine positiv orientierte Karte von M und $\omega \in \Omega^n(M)$ eine Form mit kompaktem Träger in U . Das *Integral von ω bzgl. x* ist

$$\text{Int}(\omega; x) := \int_{x(U)} \left(\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right) \circ x^{-1} \quad (6.11a)$$

bzw.

$$\text{Int}(\omega; x) = \int_{x(U)} f \quad \text{für } \omega = (f \circ x) \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (6.11b)$$

Beachte, dass der Integrand auf $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger ist, deren Integral also existiert.

Bemerkung 6.10. Um das Integral definieren zu können, muss ω natürlich nicht glatt sein; es reicht, dass die Komponentenfunktion integrierbar ist. Dann heißt ω integrierbar.

Lemma 6.11. Sei M eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $\dim M = n > 0$, seien $x: U \rightarrow x(U)$, $\tilde{x}: V \rightarrow \tilde{x}(V)$ positiv orientierte Karten von M und sei $\omega \in \Omega^n(M)$ mit kompaktem Träger in $U \cap V$. Dann sind die Integrale von ω bzgl. x und \tilde{x} gleich, also $\text{Int}(\omega; x) = \text{Int}(\omega; \tilde{x})$.

Beweis. Übung. (Tipp: Benutze die Transformationsformel für Integrale im \mathbb{R}^n . Wo geht ein, dass die Karten positiv orientiert sind?) \square

Definition 6.12. Sei M eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $\dim M = n > 0$, und $\omega \in \Omega^n(M)$ eine Form mit kompaktem Träger. Wir definieren das *Integral von ω über M* wie folgt: Zu einer Familie $\{x_i: U_i \rightarrow x_i(U_i)\}_{i \in I}$ von positiv orientierten Karten, die M überdecken, wählen wir eine $\{U_i\}_{i \in I}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_i\}_{i \in I}$ und setzen

$$\int_M \omega := \sum_{i \in I} \text{Int}(\psi_i \cdot \omega; x_i). \quad (6.12)$$

Beachte, dass wegen der Kompaktheit von $\text{supp}(\omega)$ nur endlich viele der Summanden ungleich 0 sind, sodass die Summe existiert.

Lemma 6.13. Das Integral ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl der Karten und der Zerlegung der Eins ab.

Beweis. Sei $\{x_i: U_i \rightarrow x_i(U_i)\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von M mit positiv orientierten Karten mit untergeordneter Zerlegung der Eins $\{\psi_i\}_{i \in I}$; genauso $\{y_j: V_j \rightarrow y_j(V_j)\}_{j \in J}$ und $\{\varphi_j\}_{j \in J}$. Dann ist auch $\{U_i \cap V_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ eine offene Überdeckung von M , mit untergeordneter Zerlegung der Eins $\{\psi_i \cdot \varphi_j\}_{(i,j) \in I \times J}$.

Für jedes feste $i \in I$ gilt dann auf U_i die Gleichheit

$$\psi_i \cdot \omega = \sum_{j \in J} \psi_i \cdot \varphi_j \cdot \omega, \quad (6.13)$$

weil $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ eine Zerlegung der Eins ist; wegen der Linearität des Integrals bzgl. Karten folgt daraus

$$\text{Int}(\psi_i \cdot \omega; x_i) = \sum_{j \in J} \text{Int}(\psi_i \cdot \varphi_j \cdot \omega; x_i). \quad (6.14)$$

Damit ist einerseits

$$\sum_{i \in I} \text{Int}(\psi_i \cdot \omega; x_i) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \text{Int}(\psi_i \cdot \varphi_j \cdot \omega; x_i) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \text{Int}(\psi_i \cdot \varphi_j \cdot \omega; x_i). \quad (6.15)$$

Dasselbe Argument mit vertauschten Rollen von I und J zeigt andererseits

$$\sum_{j \in J} \text{Int}(\varphi_j \cdot \omega; y_j) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \text{Int}(\varphi_j \cdot \psi_i \cdot \omega; y_j). \quad (6.16)$$

Wegen $\text{supp}(\psi_i \cdot \varphi_j \cdot \omega) \subset U_i \cap V_j$ ist nach Lemma 6.11 nun aber $\text{Int}(\psi_i \cdot \varphi_j \cdot \omega; x_i) = \text{Int}(\varphi_j \cdot \psi_i \cdot \omega; y_j)$ und wir sind fertig. \square

Proposition 6.14. (i) Das Integral ist linear, d. h.

$$\forall \omega, \tilde{\omega} \in \Omega^n(M) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \int_M (\lambda \omega + \mu \tilde{\omega}) = \lambda \int_M \omega + \mu \int_M \tilde{\omega}. \quad (6.17)$$

(ii) Das Integral ist verträglich mit Pullback entlang orientierungserhaltender Diffeomorphismen: Ist $\phi: M \rightarrow N$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten der Dimension n und $\omega \in \Omega^n(N)$ mit kompaktem Träger, so ist

$$\int_N \omega = \int_M \phi^* \omega. \quad (6.18)$$

Beweis. Übung. (Tipp: Für die Verträglichkeit mit dem Pullback erzeuge Karten von M aus Karten von N .) \square

Bemerkung 6.15. Ist $N \subset M$ eine Nullmenge – dies definiert man darüber, dass für Karten $x: U \rightarrow x(U)$ jeweils $x(N \cap U)$ eine Nullmenge im \mathbb{R}^n ist – und abgeschlossen, so ist $\int_M \omega = \int_{M \setminus N} \omega$. Dies ist oft hilfreich für die Berechnung von Integralen.

Definition 6.16. Für den Fall $\dim M = 0$ definiert man das Integral als

$$\int_M \omega := \sum_{p \in M} \text{sgn}(p) \omega(p), \quad (6.19)$$

wobei $\text{sgn}(p)$ die Vorzeichen der Punkte von M gemäß der Orientierung sind.

6.3. Mannigfaltigkeiten mit Rand und der Satz von Stokes

Wir kommen nun zum wichtigsten Resultat in der (grundlegenden) Theorie der Differentialformen: dem (verallgemeinerten) Satz von Stokes. Dafür müssen wir zunächst sogenannte *Mannigfaltigkeiten mit Rand* einführen.

Definition 6.17. Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Der n -dimensionale obere Halbraum ist

$$\mathbb{H}^n := \{(a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n \mid a^n \geq 0\}. \quad (6.20)$$

- (b) Sei $U \subset \mathbb{H}^n$ offen (also Schnitt einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit \mathbb{H}^n). Eine Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt *glatt*, wenn sie stetig ist, ihre Einschränkung auf $U \cap \{a \in \mathbb{R}^n \mid a^n > 0\}$ glatt ist und alle beliebig hohen partiellen Ableitungen dieser Einschränkung sich stetig zu Abbildungen auf ganz U fortsetzen lassen. Äquivalent dazu ist, dass es um jeden Punkt $p \in U$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, auf die sich f zu einer glatten Abbildung \tilde{f} fortsetzen lässt.

Definition 6.18 (Idee der Definition einer Mannigfaltigkeit mit Rand). Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

- (a) Eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand M wird genauso definiert wie eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, nur dass die Karten von M statt auf offene Teilmengen des \mathbb{R}^n nun auf offene Teilmengen des Halbraums \mathbb{H}^n abbilden.

Möchte man n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten mit Rand des \mathbb{R}^k definieren, so tut man dies über lokale Flachmacher, über die M aussieht wie eine n -dimensionale Halbebene im \mathbb{R}^k .

- (b) Der *Rand* einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand M ist

$$\partial M := \{p \in M \mid \exists \text{ Karte } x: U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{H}^n : x^n(p) = 0\}. \quad (6.21)$$

Die Terminologie ist hier ein bisschen verwirrend: Eine „Mannigfaltigkeit mit Rand“ ist nicht notwendigerweise eine „Mannigfaltigkeit“ im üblichen Sinn – sie ist genau dann eine Mannigfaltigkeit, wenn ihr Rand leer ist. Andersherum ist jede Mannigfaltigkeit im üblichen Sinn eine Mannigfaltigkeit mit Rand. (Natürlich könnte man die üblichen Mannigfaltigkeiten auch „Mannigfaltigkeit ohne Rand“ nennen und bei einer „Mannigfaltigkeit“ Rand zulassen, meistens^[citation needed] wird das aber nicht getan.)

Beispiel 6.19. (a) Das einfachste Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit nichtleerem Rand ist der Halbraum \mathbb{H}^n selbst. Sein Rand ist diffeomorph zu \mathbb{R}^{n-1} .

- (b) Beliebige Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sind eindimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand. Für den Rand gilt je nach Art des Intervalls $\partial(a, b) = \emptyset$, $\partial[a, b) = \{a\}$, $\partial(a, b] = \{b\}$ bzw. $\partial[a, b] = \{a, b\}$.

- (c) Die $(n + 1)$ -dimensionale abgeschlossene Kugel

$$\overline{B^{n+1}} := \overline{B_1^{n+1}(0)} = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|a\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad (6.22)$$

ist eine $(n + 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand des \mathbb{R}^{n+1} . Ihr Rand $\partial \overline{B^{n+1}} = S^n$ ist die n -dimensionale Sphäre.

Bemerkung 6.20. (a) Der Rand einer Mannigfaltigkeit mit Rand ist tatsächlich wohldefiniert: wenn ein Punkt bzgl. einer Karte ein Randpunkt ist, ist er das bzgl. jeder Karte um ihn.

- (b) Die meisten Definitionen für Objekte und Begriffe auf Mannigfaltigkeiten können wörtlich oder ohne große Änderungen für Mannigfaltigkeiten mit Rand übernommen werden. Manchmal muss man am Rand ein kleines bisschen aufpassen: Beispielsweise lassen sich an Randpunkten $p \in \partial M$ Tangentialvektoren $v \in T_p M$, die nicht tangential zum Rand sind, sondern nach „innen“ zeigen (bzw. nach „außen“), nur als *einseitige* Ableitungen von Kurven $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow M$ (bzw. $\gamma: (-\varepsilon, 0] \rightarrow M$) mit $\gamma(0) = p$ schreiben. Man hat aber immer noch die übliche Basisentwicklung $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ bzgl. einer Karte.

Außerdem aufpassen muss man bei der Definition von Orientierbarkeit und Orientierungen. Definierte man diese über die Existenz von orientierten Atlanten, so wären abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ nicht orientierbar. Man möchte aber, dass diese orientierbar sind, deshalb muss man Orientierbarkeit zumindest für eindimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand anders definieren, bspw. über die Existenz einer nirgends verschwindenden Einsform (siehe Satz 6.6). In diesem Fall muss man auch bei der Definition des Integrals negativ orientierte Karten zulassen und bei diesen ein zusätzliches Minuszeichen einführen, um Kartenunabhängigkeit zu erhalten.

- (c) Der Rand ∂M einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand M ist selbst eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension $n - 1$; Karten für ∂M erhält man, indem man von Karten von M um Randpunkte die letzte Komponente weglässt. In natürlicher Weise ist an Randpunkten $p \in \partial M$ dann $T_p(\partial M) \subset T_p M$, und für $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M$ gilt $v \in T_p(\partial M) \iff v^n = 0$.

Definition 6.21. Sei M eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.

- (a) Für $p \in \partial M$ heißt ein $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M$ *nach außen gerichtet* (bzw. *nach innen gerichtet*), wenn $v^n < 0$ (bzw. $v^n > 0$) gilt.
- (b) Ist M orientierbar, so ist auch ∂M orientierbar. Eine Orientierung für M induziert eine Orientierung auf ∂M über die Festlegung, dass eine geordnete Basis (b_1, \dots, b_{n-1}) von $T_p(\partial M)$ genau dann positiv orientiert ist, wenn (v, b_1, \dots, b_{n-1}) für nach außen gerichtete $v \in T_p M$ eine positiv orientierte Basis von $T_p M$ ist. Äquivalent heißt das also, dass für eine positiv orientierte Karte x von M am Rand die induzierte Karte (x^1, \dots, x^{n-1}) von ∂M für positiv orientiert ist für gerades n und negativ orientiert für ungerades n .

Beispielsweise erhält man als induzierte Orientierung auf der Sphäre $S^n = \overline{\partial B^{n+1}}$, wenn man der Kugel die Orientierung gibt, die im Inneren durch die Standardkarte $x = \text{id}$ gegeben ist, die Standard-Orientierung (mache dir das für $n = 0, 1, 2$ anschaulich klar!).

Nun können wir endlich den Satz von Stokes formulieren und beweisen.

Satz 6.22 (Stokes). Sei M eine n -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (6.23)$$

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall, dass ω Träger im Definitionsbereich einer einzelnen Karte hat. Weil das Integral invariant unter Pullbacks entlang von orientierungserhaltenden Diffeomorphismen ist, genügt es, eine Form ω auf $U \subset \mathbb{H}^n$ zu betrachten.

Sei also $U \subset \mathbb{H}^n$ offen und $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ mit kompaktem Träger. Es ist also

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^n \quad (6.24)$$

mit glatten Funktionen $\omega_i \in C^\infty(U)$ mit kompaktem Träger, wobei der „Hut“ auf der rechten Seite bedeutet, dass jeweils dx^i weggelassen wird. Da ω kompakten Träger in U hat, können wir U oBdA als einen halben Würfel der Seitenlänge L annehmen (wenn es keiner ist, dann vergrößern), $U = (-L, L)^{n-1} \times [0, L]$.

Einerseits ist nun die äußere Ableitung von ω gegeben durch

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (6.25)$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_U d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_U \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{-L}^L da^1 \dots \int_{-L}^L da^{n-1} \int_0^L da^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(a^1, \dots, a^n). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Nach dem Satz von Fubini können wir den i -ten Summanden berechnen, indem wir zuerst das Integral über da^i ausführen, für das wir für $i < n$ mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung jeweils

$$\int_{-L}^L da^i \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(a^1, \dots, a^n) = \int_{-L}^L da^i \frac{d\omega_i(a^1, \dots, a^n)}{da^i} = \omega_i(a^1, \dots, a^n) \Big|_{a^i=-L}^{a^i=L} \quad (6.27)$$

erhalten. Weil ω aber Träger in U hat, verschwindet es bei $a_i = \pm L$, diese Terme tragen also nichts bei. Es bleibt also nur der n -te Term, den wir analog berechnen, und wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} \int_U d\omega &= (-1)^{n-1} \int_{-L}^L da^1 \cdots \int_{-L}^L da^{n-1} \omega_n(a^1, \dots, a^n) \Big|_{a^n=0}^{a^n=L} \\ &= (-1)^n \int_{-L}^L da^1 \cdots \int_{-L}^L da^{n-1} \omega_n(a^1, \dots, a^{n-1}, 0). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Andererseits müssen wir nun $\int_{\partial U} \omega$ berechnen. Als Form auf ∂U ist $dx^n = 0$, weil die Vektoren in $T_p(\partial U) \subset T_p U$ ja gerade dadurch charakterisiert sind, dass $0 = v^n = dx^n|_p(v)$ ist. Damit ist mit (6.24) also

$$\int_{\partial U} \omega = \int_{\partial U} \omega_n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}. \quad (6.29)$$

Weil die induzierte Karte (x^1, \dots, x^{n-1}) von ∂U positiv orientiert ist für gerades n und negativ für ungerades n , ist das Integral dieser $(n-1)$ -Form nun definiert als

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} \omega_n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} &= (-1)^n \int_{\partial U} \omega_n \\ &= (-1)^n \int_{-L}^L da^1 \cdots \int_{-L}^L da^{n-1} \omega_n(a^1, \dots, a^{n-1}, 0), \end{aligned} \quad (6.30)$$

was den Beweis für Formen mit Träger im Definitionsbereich einer Karte abschließt.

Für eine allgemeine Form $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ mit kompaktem Träger wählen wir eine endliche Überdeckung $(U_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ von $\text{supp}(\omega)$ mit Definitionsbereichen von Karten und eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins $(\psi_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$. Dann gilt also $\omega = \sum_{i=1}^N \psi_i \omega$, und die einzelnen Summanden sind in Kartenumgebungen kompakt getragene Formen. Für solche haben wir den Satz von Stokes oben aber schon bewiesen, und damit erhalten wir schließlich⁵

$$\int_M d\omega = \int_M d\left(\sum_{i=1}^N \psi_i \omega\right) = \sum_{i=1}^N \int_M d(\psi_i \omega) = \sum_{i=1}^N \int_{\partial M} \psi_i \omega = \int_{\partial M} \sum_{i=1}^N \psi_i \omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (6.31)$$

□

⁵Würden wir hier die Definition des Integrals von $d\omega$ per Zerlegung der Eins benutzen, so erhielten wir die Summe $\sum_{i=1}^N \int_M \psi_i d\omega$ und müssten anschließend die Produktregel sowie $d1 = 0$ anwenden (so hatte ich im Kurs den Beweis „gerettet“).

Stattdessen können wir aber auch ω als Summe der $\psi_i \omega$ schreiben, bevor wir die äußere Ableitung berechnen, und die Linearität der äußeren Ableitung und des Integrals benutzen. Was ursprünglich im Skript stand, stimmte also doch: Wegen Linearität reicht es, sich auf den Fall von Kartenumgebungen zu beschränken, denn jede kompakt getragene Form ist Summe von in Kartenumgebungen getragenen Formen.

Bemerkung 6.23. Die obige Formulierung des Satzes von Stokes stammt von Cartan. Sie verallgemeinert die Integralsätze der klassischen Vektoranalysis, wie den klassischen Satz von Stokes (über das Flächenintegral der Rotation eines Vektorfeldes in \mathbb{R}^3) und den Satz von Gauß (über das Integral der Divergenz eines Vektorfeldes in \mathbb{R}^n).

7. Grundlagen der symplektischen Geometrie

Das Beste kommt zum Schluss.

DER VOLKSMUND

7.1. Symplektische Vektorräume

Definition 7.1. Ein *symplektischer Vektorraum* ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum V zusammen mit einer nichtausgearteten alternierenden Bilinearform $\omega \in \text{MultAlt}^2(V)$. Diese heißt die *symplektische Form*. Nichtausgeartetheit bedeutet $(\forall w \in V : \omega(v, w) = 0) \implies v = 0$.

Bemerkung 7.2. Dass ω nichtausgeartet ist, bedeutet äquivalent, dass die lineare Abbildung $V \ni v \mapsto \omega(v, \cdot) \in V^*$ ein Isomorphismus ist.

Definition 7.3. Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Das *symplektische Komplement* von U ist der Unterraum

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall w \in U : \omega(v, w) = 0\}. \quad (7.1)$$

Lemma 7.4. Für das symplektische Komplement gilt $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$. Außerdem ist $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis. Übung. (Tipp: Für den ersten Teil zeige, dass die lineare Abbildung $\Phi: V \rightarrow U^*$, $(\Phi(v))(w) = \omega(v, w)$ surjektiv ist, und argumentiere damit. Mit dieser Dimensionsformel folgt leicht der zweite Teil.) \square

Definition 7.5. Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum. Ein *symplektischer Unterraum* ist ein Unterraum $U \subset V$, auf den eingeschränkt ω wieder eine symplektische Form ist, also weiterhin nichtausgeartet.

Lemma 7.6. Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) U ist ein symplektischer Unterraum.
- (ii) $U \cap U^\perp = \{0\}$
- (iii) $V = U \oplus U^\perp$
- (iv) U^\perp ist ein symplektischer Unterraum.

Beweis. Übung. □

Satz 7.7. Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum. Es gibt eine *symplektische Basis* für (V, ω) , d. h. eine Basis $(e^1, \dots, e^n, f_1, \dots, f_n)$ von V mit

$$\omega(e^i, e^j) = 0, \omega(f_i, f_j) = 0, \omega(e^i, f_j) = \delta_j^i. \quad (7.2)$$

Insbesondere ist $\dim V$ gerade.

Beweis. Wir starten mit irgendeinem Vektor $e^1 \in V$, $e^1 \neq 0$. Weil ω nichtausgeartet ist, muss es dann ein $f_1 \in V$ geben mit $\omega(e^1, f_1) \neq 0$; durch Skalieren erreichen wir $\omega(e^1, f_1) = 1$. Weil ω alternierend ist, sind e^1 und f_1 linear unabhängig.

Wir betrachten nun den Unterraum $\tilde{V} := \text{span}\{e^1, f_1\}$. Von diesem rechnet man leicht nach, dass er ein symplektischer Unterraum ist (Übung!). Also ist auch $(\tilde{V})^\perp$ ein symplektischer Unterraum.

Indem wir dieselbe Prozedur auf $(\tilde{V})^\perp$ anwenden usw., erhalten wir nach endlich vielen Schritten eine Basis wie behauptet. □

Bemerkung 7.8. Ist $(e^1, \dots, e^n, f_1, \dots, f_n)$ eine symplektische Basis von (V, ω) und $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta^1, \dots, \beta^n)$ die dazu duale Basis von V^* , so gilt also $\omega = \alpha_i \wedge \beta^i$ (mit Summenkonvention).

7.2. Symplektische Mannigfaltigkeiten und der Satz von Darboux

Definition 7.9. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

- (a) Eine *fast-symplektische Form* auf M ist eine nichtausgeartete 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$ (also eine glatt vom Punkt abhängende symplektische Form auf jedem Tangentialraum). Das Paar (M, ω) heißt dann eine *fast-symplektische Mannigfaltigkeit*.
- (b) Eine *symplektische Form* auf M ist eine geschlossene nichtausgeartete 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$. (M, ω) heißt dann eine *symplektische Mannigfaltigkeit*.

Beispiel 7.10. (a) \mathbb{R}^{2n} mit Koordinaten $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ ist eine symplektische Mannigfaltigkeit mit der symplektischen Form $\omega = dp_i \wedge dq^i$.

(b) Jede 2-dimensionale fast-symplektische Mannigfaltigkeit ist symplektisch, denn es ist $d\omega \in \Omega^3(M) = 0$.

(c) Jede 2-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit besitzt eine symplektische Struktur, denn Orientierbarkeit ist äquivalent zur Existenz einer nirgends verschwindenden $\dim M$ -Form, hier also einer nirgends verschwindenden 2-Form.

Bemerkung 7.11. Ist (M, ω) eine fast-symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, so ist M orientierbar, denn $\omega^n := \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n\text{-mal}}$ ist eine nirgends verschwindende $2n$ -Form. Ist umgekehrt $\omega \in \Omega^2(M)$ eine Form, für die $\omega^n \in \Omega^{2n}(M)$ nirgends verschwindet, so ist ω nichtausgeartet (Übung!).

Lokal sehen alle symplektischen Mannigfaltigkeiten derselben Dimension gleich aus:

Satz 7.12 (Darboux). Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann gibt es um jeden Punkt in M eine Karte $(q, p) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n): U \rightarrow (q, p)(U) \subset \mathbb{R}^{2n}$, bzgl. der ω die Form

$$\omega|_U = dp_i \wedge dq^i \quad (7.3)$$

hat.

(hier ohne Beweis)

Definition 7.13. Koordinaten, in denen die symplektische Form die Form aus dem Satz von Darboux annimmt, heißen *kanonische Koordinaten*.

7.3. Hamilton-Vektorfelder und geometrische Mechanik

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit.

Definition 7.14. (a) Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *symplektisch*, wenn $\mathcal{L}_X \omega = 0$ gilt.

(b) Das *Hamilton-Vektorfeld* zu einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ ist $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ definiert durch $\omega(X_f, \cdot) = -df$ (weil ω nichtausgeartet ist, ist das wohldefiniert).

Bemerkung 7.15. Nach Cartans magischer Formel ist ein Vektorfeld X genau dann symplektisch, wenn $\omega(X, \cdot)$ geschlossen ist. Nach dem Poincaré-Lemma ist diese Form dann lokal exakt, also sind symplektische Vektorfelder zumindest lokal Hamilton-Vektorfelder.

Proposition 7.16. Seien (q, p) kanonische Koordinaten. Das Hamilton-Vektorfeld zu f ist gegeben durch

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (7.4)$$

Beweis. Übung. □

Definition 7.17. Die *Poisson-Klammer* zweier Funktionen $f, g \in C^\infty(M)$ ist $\{f, g\} := \omega(X_g, X_f) = \mathrm{d}f(X_g)$.

Bemerkung 7.18. Die Phasenräume der Hamilton'schen Formulierung der klassischen Mechanik sind symplektische Mannigfaltigkeiten. Bei kanonischen Koordinaten (q, p) werden q als (verallgemeinerte) Ortskoordinaten interpretiert, p als die zugehörigen (verallgemeinerten) Impulse. Ist $H \in C^\infty(M)$ die Hamilton-Funktion (d. h. für konservative Systeme die Energie), so sind die möglichen mechanischen Kurven des Systems gerade die Integralkurven des zugehörigen Hamilton-Vektorfelds X_H , und die Zeitentwicklung einer beliebigen Funktion f entlang dieser Integralkurven ist gegeben durch $\dot{f} = \{f, H\}$.

A. Details zur Existenz von Zerlegungen der Eins

Hier geben wir ein paar mehr Details zur Existenz von Zerlegungen der Eins.

Definition A.1. Sei M ein topologischer Raum und $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von M . Eine *Verfeinerung* dieser Überdeckung ist eine Überdeckung $\{Y_j\}_{j \in J}$, sodass jedes Y_j in einem der X_i enthalten ist.

Lemma A.2. Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen eines topologischen Raums M . Ist $\{X_i\}_{i \in I}$ lokal endlich, so ist $\overline{\bigcup_{i \in I} X_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{X_i}$. Außerdem ist auch $\{\overline{X_i}\}_{i \in I}$ lokal endlich. (ohne Beweis)

Wie im Haupttext gesagt, ist die Idee des Beweises der Existenz von Zerlegungen der Eins, die ψ_i aus Hutfunktionen auf Kugeln zu konstruieren, die Bilder von Kartenumgebungen in den gegebenen offenen Mengen sind. Um das auszuführen, brauchen wir noch einen kleinen technischen Hilfssatz:

Lemma A.3. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Es existieren eine Familie $\{\varphi_j: V_j \rightarrow \varphi_j(V_j)\}_{j \in J}$ von Karten von M , die M überdecken, sowie eine weitere offene Überdeckung $\{B_j\}_{j \in J}$ von M mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $\{V_j\}_{j \in J}$ ist eine Verfeinerung von $\{U_i\}_{i \in I}$.
- (ii) Für alle $j \in J$ ist $\overline{B_j} \subset V_j$.
- (iii) $\{B_j\}_{j \in J}$ ist lokal endlich.
- (iv) Zu jedem $j \in J$ existiert ein $r_j > 0$ mit $\varphi_j(B_j) = B_{r_j}^n(0)$ (d. h. die Karte bildet B_j auf eine Kugel ab).

(ohne Beweis, da zu technisch/topologisch)

Bemerkung A.4. Dieses Lemma zeigt insbesondere, dass Mannigfaltigkeiten *parakompakt* sind: Jede offene Überdeckung hat eine lokal endliche Verfeinerung.

Beweis von Satz 2.6 über Existenz von Zerlegungen der Eins. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Wir wollen zeigen, dass es eine dieser Überdeckungen untergeordnete Zerlegung der Eins gibt.

Wende das vorige Lemma an, um $\{\varphi_j: V_j \rightarrow \varphi_j(V_j)\}_{j \in J}$, $\{B_j\}_{j \in J}$, $\{r_j\}_{j \in J}$ wie dort zu erhalten. Für jedes $j \in J$ wählen wir eine Hutfunktion $H_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, die auf der Kugel $B_{r_j}^n(0)$ positiv ist und außerhalb der Kugel $B_{r_j}^n(0)$ verschwindet (diese existiert nach Proposition 2.3 für $r' = r_j$).

Für $j \in J$ definieren wir $f_j \in C^\infty(M)$ durch

$$f_j := \begin{cases} H_j \circ \varphi_j & \text{auf } V_j \\ 0 & \text{auf } M \setminus \overline{B_j}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Auf dem Durchschnitt $V_j \setminus \overline{B_j}$ der beiden Definitionsbereiche ergeben beide Ausdrücke 0, f_j ist also wohldefiniert. Auf B_j ist f_j positiv, außerhalb von B_j ist es 0; also ist $\text{supp}(f_j) = \overline{B_j}$.

Wir definieren jetzt $F \in C^\infty(M)$ durch $F(p) := \sum_{j \in J} f_j(p)$ (wegen der lokalen Endlichkeit von $\{B_j\}_{j \in J}$ existiert die Summe). Da die f_j nichtnegativ und auf B_j jeweils positiv sind, ist $F > 0$ (da jedes $p \in M$ in einem B_j liegt). Wenn wir also $g_j := f_j/F \in C^\infty(M)$ setzen, dann ist jedes g_j eine nichtnegative Funktion, die auf B_j positiv ist und für die $\text{supp}(g_j) = \overline{B_j}$ gilt, und es ist $\sum_{j \in J} g_j = F/F = 1$.

Jetzt müssen wir die konstruierten Funktionen g_j noch zu den gesuchten Funktionen $\{\psi_i\}_{i \in I}$ zusammenfassen. Da $\{V_j\}_{j \in J}$ eine Verfeinerung von $\{U_i\}_{i \in I}$ ist, gibt es zu jedem $j \in J$ ein $\lambda(j) \in I$ mit $V_j \subset U_{\lambda(j)}$. Wir setzen

$$\psi_i := \sum_{j \in J: \lambda(j)=i} g_j \in C^\infty(M). \quad (\text{A.2})$$

Weil die g_j positiv sind und jedes g_j genau auf B_j von 0 verschieden ist, gilt jeweils $\text{supp}(\psi_i) = \overline{\bigcup_{j: \lambda(j)=i} B_j} = \bigcup_{j: \lambda(j)=i} \overline{B_j} \subset U_i$, wobei bei der letzten Gleichheit Lemma A.2 benutzt wurde. Nach diesem Lemma ist außerdem $\{\overline{B_j}\}_{j \in J}$ lokal endlich; da die $\overline{B_j}$ einfach nur zu den Trägern $\text{supp}(\psi_i)$ „zusammengefasst werden“, ist damit auch $\{\text{supp}(\psi_i)\}_{i \in I}$ lokal endlich.

Nach Konstruktion nehmen die ψ_i Werte in $[0, 1]$ an und es gilt $\sum_{i \in I} \psi_i = 1$. \square