

Einführung in die Differentialgeometrie

Kurs auf der CdE-WinterAkademie 2018/19

Benjamin Haake, Philip Schwartz

Dieses Skript wurde mit $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ und der KOMA-Script-Klasse scrbook gesetzt.

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	5
0.1. Was wir nicht machen werden	5
0.2. Bekannte Konzepte, Notationen etc.	6
0.2.1. Grundlegende lineare Algebra	6
0.2.2. Dualräume	7
0.2.3. Mehrdimensionale Analysis	8
1. Mannigfaltigkeiten	11
1.1. Topologie	11
1.2. Topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeiten	13
1.3. Differenzierbare Abbildungen	14
1.4. Untermannigfaltigkeiten	15
2. Der Tangentialraum und das Differential	19
2.1. Der Tangentialraum	19
2.2. Das Differential	21
2.3. Der Tangentialraum eines Vektorraums	23
2.4. Koordinatenvektoren	27
2.5. Ableitungen von Kurven	30
2.6. Eigenschaften von differenzierbaren Abbildungen	32
3. Multilineare Algebra: Das Tensorprodukt	35
3.1. Das Tensorprodukt von Vektorräumen	35
3.2. Tensoren als multilineare Abbildungen	38
3.3. Rechnungen in Komponenten	40
4. Ein analytischer Trick: Hutfunktionen und Zerlegungen der Eins	43
4.1. Abschneidefunktionen auf \mathbb{R} und Hutfunktionen im \mathbb{R}^n	43
4.2. Zerlegungen der Eins	45
4.3. Hutfunktionen auf Mannigfaltigkeiten	46
5. Vektorbündel	49
5.1. Faserbündel	49
5.2. Vektorbündel	50
5.3. Konstruktionen von Vektorbündeln	53

6. Vektorfelder	57
6.1. Grundlagen	57
6.2. Der Kommutator	59
6.3. Transport von Vektorfeldern	60
6.4. Integralkurven, Flüsse und die Lie-Ableitung	61
7. Lie-Gruppen	67
7.1. Grundlagen	67
7.2. Die Exponentialabbildung	69
7.3. Darstellungen	71
8. Tensorbündel und Tensorfelder	73
8.1. Tensorbündel	73
8.2. Tensororderivationen, Pullback und die Lie-Ableitung	75
9. Wenn noch Zeit ist: Kovariante Ableitungen	79
9.1. Grundlagen	79
9.2. Induzierte Zusammenhänge	81
9.3. Parallele Schnitte	82
9.4. Geodäten	83
A. Details zur Existenz von Zerlegungen der Eins	85

0. Einleitung

Differentialgeometrie ist die Lehre von Invarianz unter Notationswechsel.

ALTES CHINESISCHES SPRICHWORT

Die moderne/abstrakte Differentialgeometrie beschäftigt sich mit sogenannten *Mannigfaltigkeiten*, Verallgemeinerungen von Kurven und Flächen auf höhere Dimensionen. Sie untersucht diese Objekte mit Methoden der Differentialrechnung, die auf sie verallgemeinert werden.

Differentialgeometrische Methoden sind extrem wichtig innerhalb der Mathematik und auch in quasi allen ihren Anwendungsgebieten. Insbesondere aus der theoretischen Physik sind sie nicht wegzudenken – die allgemeine Relativitätstheorie und die klassische Formulierung von sogenannten Eichtheorien für die Quantenfeldtheorie/Elementarteilchenphysik basieren auf Differentialgeometrie, und auch ein fundamentales Verständnis allein schon der klassischen Mechanik benötigt differentialgeometrische Begriffe (symplektische Geometrie).

Historisch wurde die abstrakte Differentialgeometrie entwickelt, als BERNHARD RIEMANN Mannigfaltigkeiten einführte, um klassische Ideen von CARL FRIEDRICH GAUSS zu Kurven und Flächen zu verallgemeinern, und GREGORIO RICCI-CURBASTRO und TULLIO LEVI-CIVITA den Tensoralkül entwickelten. Die moderne, koordinatenfreie Sprache geht in ihren Ursprüngen auf ÉLIE CARTAN zurück.

Wir werden in diesem Kurs die grundlegenden Begriffe der Differentialgeometrie Schritt für Schritt entwickeln und dabei versuchen, einen möglichst generellen Überblick zu geben. Dabei konzentrieren wir uns auf Konzepte, die sich aufbauend nur auf Mannigfaltigkeiten definieren lassen und ohne Zusatzstrukturen auskommen.

Dieses Skript ist an den meisten Stellen recht detailliert. Für Themen, die wir nicht behandeln, oder mehr Details bietet es sich an, in gute Lehrbücher zu gucken. Ein sehr gutes, sehr detailliertes Lehrbuch für grundlegende moderne Differentialgeometrie ist *Introduction to Smooth Manifolds* von John M. Lee, Band 218 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics* des Springer Verlags, DOI 10.1007/978-1-4419-9982-5.

0.1. Was wir nicht machen werden

In einen Einführungskurs in die Differentialgeometrie gehören eigentlich auf jeden Fall noch ein paar Themen, die wir aus Zeitgründen auslassen werden. Das sind die

0. Einleitung

folgenden:

- Differentialformen und die äußere Ableitung
- Integration auf Mannigfaltigkeiten
 - Orientierbarkeit
 - Integration
 - Der Satz von Stokes
- Einführung in die Riemann'sche Geometrie

Immer noch recht fundamental, aber unserer Meinung nach für eine erste Einführung nicht ganz so wichtig sind die folgenden Themen, die wir ebenfalls auslassen:

- Lokale Form von Immersionen und Submersionen
- Immergierte Untermannigfaltigkeiten
- Distributionen und der Satz von Frobenius

Jetzt aber genug des Vorgeplänkels – fangen wir an!

0.2. Bekannte Konzepte, Notationen etc.

Hier werden wir ein paar Konzepte der linearen Algebra und mehrdimensionalen Analysis wiederholen.

0.2.1. Grundlegende lineare Algebra

Definition 0.2.1. Ein (reeller) *Vektorraum* ist eine Menge V , deren Elemente man in „sinnvoller“ Art und Weise zueinander addieren („Vektoraddition“) und mit reellen Zahlen skalieren („Skalarmultiplikation“) kann.

Man kann Vektorräume auch über allgemeinen Körpern anstelle von \mathbb{R} definieren; wir benötigen allerdings nur reelle Vektorräume.

Definition 0.2.2. Eine (\mathbb{R} -)lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen zwei Vektorräumen ist eine Abbildung mit $f(\lambda v + \mu \tilde{v}) = \lambda f(v) + \mu f(\tilde{v})$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, \tilde{v} \in V$.

Der *Kern* von f ist der Untervektorraum $\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ von V .

Das *Bild* im $f = f(V)$ von f ist ein Untervektorraum von W .

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W schreibt man als

$$\text{Hom}(V, W) := \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ linear}\}.$$

Mit punktweiser Addition und Multiplikation ist sie selbst ein Vektorraum.

Ein *Isomorphismus* von Vektorräumen ist eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$, die sich durch eine lineare Abbildung $g: W \rightarrow V$ umkehren lässt, also $g \circ f = \text{id}_V$ und $f \circ g = \text{id}_W$. Wenn eine lineare Abbildung bijektiv ist, ist die Umkehrabbildung automatisch linear; also ist ein Isomorphismus äquivalent eine bijektive lineare Abbildung.

Lemma 0.2.3. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$.

Definition 0.2.4. Eine *Basis* von V ist eine Menge $\mathcal{B} \subset V$ von Vektoren, sodass sich jeder Vektor $v \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$ schreiben lässt mit Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und Basisvektoren $b_i \in \mathcal{B}$.

Die Kardinalität von \mathcal{B} ist die *Dimension* von V ; sie ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Definition 0.2.5. Der *Rang* einer linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist die Dimension des Bildes, $\text{rk } f := \dim \text{im } f$. Er ist höchstens das Minimum von $\dim V$ und $\dim W$.

Lemma 0.2.6. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist eindeutig festgelegt durch die Bilder einer Basis \mathcal{B} von V .

Dabei können die Bilder $f(b) \in W$ für $b \in \mathcal{B}$ beliebig gewählt werden; die darüber definierte lineare Abbildung f entsteht durch sogenannte *lineare Fortsetzung*.

Definition 0.2.7. Seien V und W endlich-dimensional, $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V und $\{c_1, \dots, c_m\}$ eine Basis von W . Die *Darstellungsmatrix* einer linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ bzgl. dieser Basen ist die $m \times n$ -Matrix

$$(f_j^i)_{i,j} = \begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^m & \cdots & f_n^m \end{pmatrix},$$

deren Komponenten durch $f(b_j) =: \sum_{i=1}^m f_j^i c_i$ definiert sind.

0.2.2. Dualräume

Definition 0.2.8. Für einen reellen Vektorraum V ist

$$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{f: V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ linear}\}$$

der *Dualraum* von V .

Definition 0.2.9. Für eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ definieren wir die *duale Abbildung* $f': W^* \rightarrow V^*$ durch $f'(\eta) := \eta \circ f \in V^*$. f' ist linear (Übung).

Lemma 0.2.10. Sei V endlich-dimensional und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V . Für $i = 1, \dots, n$ definieren wir $\theta^i \in V^*$ durch

$$\theta^i(b_j) := \delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

0. Einleitung

und lineare Fortsetzung.

Dann ist $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ eine Basis von V^* . Man nennt sie die zu $\{b_i\}$ *duale Basis*. Insbesondere ist $\dim V = \dim V^*$.

Beweis. Sei $\eta \in V^*$. Wir müssen zeigen, dass sich η in eindeutiger Weise als $\eta = \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta^i$ schreiben lässt mit Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Es ist aber $(\sum_{i=1}^n \lambda_i \theta^i)(b_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta^i(b_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_j^i = \lambda_j$; also müssen wir einfach $\lambda_j := \eta(b_j)$ setzen. \square

Lemma 0.2.11. Sei V ein Vektorraum. Wir definieren eine Abbildung $\Theta: V \rightarrow V^{**} := (V^*)^*$ durch $(\Theta(v))(\eta) := \eta(v)$ für $v \in V, \eta \in V^*$.

Θ ist linear und injektiv.

Beweis. Übung. \square

Wir können V also über Θ mit einem Unterraum von V^{**} identifizieren. Ist V endlich-dimensional, dann ist $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$, also ist Θ ein Isomorphismus.

0.2.3. Mehrdimensionale Analysis

Notation 0.2.12. Punkte im \mathbb{R}^n schreiben wir als $a = (a^1, \dots, a^n)$. Die Vektoren der Standardbasis von \mathbb{R}^n schreiben wir als $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$, also

$$e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0).$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die partielle Ableitung von f nach der i -ten Komponente schreiben wir als $\partial_i f$, d. h. es ist

$$(\partial_i f)(a) = \left. \frac{df(a + he_i)}{dh} \right|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}.$$

Die Jacobi-Matrix einer Abbildung $f = (f^1, \dots, f^n): U \rightarrow V, U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ am Punkt $a \in U$ ist die $n \times m$ -Matrix

$$Jf|_a = \begin{pmatrix} (\partial_1 f^1)(a) & \dots & (\partial_m f^1)(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f^n)(a) & \dots & (\partial_m f^n)(a) \end{pmatrix}$$

Ist allgemeiner $A \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlich-dimensionalen Vektorraums und $f: A \rightarrow W$ eine Abbildung in einen endlich-dimensionalen Vektorraum W , so schreiben wir die Richtungsableitung von f in Richtung eines Vektors $v \in V$ als $\partial_v f$, d. h. es ist

$$(\partial_v f)(a) = \left. \frac{df(a + hv)}{dh} \right|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

für $a \in A$.

Satz 0.2.13 (Mehrdimensionale Kettenregel für vektorwertige Abbildungen). Seien $A \subset \mathbb{R}^l, B \subset \mathbb{R}^m, C \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f: A \rightarrow C$ differenzierbar, und für die Jacobi-Matrizen gilt

$$J(g \circ f)|_a = Jg|_{f(a)} \cdot Jf|_a$$

für $a \in A$. Mit Richtungsableitungen geschrieben heißt das

$$\left(\partial_v(g \circ f)\right)(a) = \left(\partial_{(\partial_v f)(a)}g\right)(f(a))$$

für $v \in \mathbb{R}^l, a \in A$. In dieser Form gilt die Kettenregel auch allgemeiner für Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von endlich-dimensionalen Vektorräumen, die nicht \mathbb{R}^n sind.

Speziell für den Fall $l = 1$, also $A \subset \mathbb{R}$, erhalten wir

$$(g \circ f)'(a) = \left(\partial_{f'(a)}g\right)(f(a)).$$

Die formale Definition von mehrdimensionaler (totaler) Differenzierbarkeit brauchen wir nicht; uns reicht die Aussage, dass sie von stetiger partieller Differenzierbarkeit impliziert wird.

Definition 0.2.14. Seien $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ heißt *k-fach stetig (partiell) differenzierbar* oder auch *von der Klasse C^k* , wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f$ der Ordnung k existieren und stetige Funktionen auf U sind.

f heißt *glatt, von der Klasse C^∞* oder auch *beliebig/unendlich oft differenzierbar*, wenn es C^k für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist.

Nach Kettenregel (iterativ) sind Verkettungen glatter Funktionen wieder glatt.

Satz 0.2.15 (Satz von Schwarz). Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, so ist $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

Iterativ folgt, dass bei Anwendung auf glatte Funktionen beliebig viele partielle Ableitungen beliebig vertauschen, $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_r} f = \partial_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial_{i_{\sigma(r)}} f$ für beliebige Permutationen $\sigma \in S_r$.

Satz 0.2.16 (Satz von der inversen Abbildung). Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und sei $f: U \rightarrow V$ glatt. Ist $Jf|_a$ ein Isomorphismus, dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus um a , d. h. es gibt eine offene Umgebung $W \subset U$ von a , sodass $f|_W: W \rightarrow f(W)$ ein Diffeomorphismus ist.

Satz 0.2.17 (Satz von der impliziten Funktion). Sei $m > n$, seien $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $F: U \rightarrow V$ eine glatte Funktion. Die Jacobi-Matrix am Punkt $p \in U$ hat die Form

$$JF|_p = \begin{pmatrix} \partial_1 F^1 & \dots & \partial_n F^1 & \partial_{n+1} F^1 & \dots & \partial_m F^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F^n & \dots & \partial_n F^n & \partial_{n+1} F^n & \dots & \partial_m F^n \end{pmatrix} (p).$$

0. Einleitung

Ist die linke $n \times n$ -Teilmatrix invertierbar, dann lässt sich die Gleichung $F(a, b) = 0$ für $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^{m-n}$ in einer Umgebung von p nach a auflösen. D. h. es gibt offene Mengen $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^{m-n}$ mit $p \in A \times B \subset U$ und eine glatte Abbildung $G: B \rightarrow A$, sodass $F(a, b) = 0 \iff a = G(b)$ gilt.

1. Mannigfaltigkeiten

Durch n malige Wiederholung dieses Verfahrens wird daher die Ortsbestimmung in einer n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Grössenbestimmungen [...] zurückgeführt.

BERNHARD RIEMANN
Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen
(1854)

The introduction of numbers as coordinates [...] is an act of violence [...].

HERMANN WEYL
Philosophy of Mathematics and Natural Science (1949)

1.1. Topologie

Definition 1.1.1 (Topologischer Raum). Ein *topologischer Raum* ist ein Tupel (X, \mathcal{T}) bestehend aus einer Menge X und einer Familie von Teilmengen \mathcal{T} , die folgende Eigenschaften erfüllen:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (ii) $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ gilt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$
- (iii) Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Eine *Topologie* auf der Menge X ist eine Familie \mathcal{T} wie oben. Die Elemente von \mathcal{T} heißen *offene Mengen*. Eine Menge ist *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist.

Man beachte, dass schon per Definition eine Menge genau dann offen ist, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die in der Menge liegt (die Vereinigung über alle Umgebungen ist dann die Menge selbst).

Definition 1.1.2 (Basis einer Topologie). Eine *Basis* einer Topologie \mathcal{T} ist eine Familie offener Mengen $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, sodass sich jede offene Menge als Vereinigung von Elementen der Basis schreiben lässt, das heißt:

$$\forall U \in \mathcal{T} \exists \{B_i\}_{i \in J} \subset \{B_i\}_{i \in I} : U = \bigcup_{i \in J} B_i$$

1. Mannigfaltigkeiten

Beispiel 1.1.3. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so bilden die bzgl. der Metrik offenen Mengen eine Topologie mit den ε -Bällen $\{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ als Basis. Dies gilt per Definition: In einem metrischen Raum ist eine Menge offen, wenn für jeden Punkt in der Menge ein ε -Ball noch ganz in der Menge liegt. Diese Definition erfüllt die Axiome eines topologischen Raumes: (i) ist klar, für (ii) kann man punktweise das Minimum der ε nehmen und bei (iii) kann man für jeden Punkt eine Menge wählen, in dem dieser Punkt liegt und dann liegt der ε -Ball, der in dieser Menge enthalten ist, auch in der gesamten Menge.

Definition 1.1.4 (Zweitabzählbarkeit). Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *zweitabzählbar*, wenn für die Topologie \mathcal{T} eine abzählbare Basis existiert.

Definition 1.1.5 (Kompaktheit). Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung (das heißt jede Familie offener Mengen $\{U_i\}_{i \in I}$ mit $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$) eine endliche Teilüberdeckung hat (also endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$ existieren, sodass schon $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ gilt).

Definition 1.1.6 (Hausdorffraum). Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *hausdorffsch* oder *Hausdorffraum*, falls für je zwei Punkte $x, y \in X, x \neq y$ offene Umgebungen $U_x, U_y \in \mathcal{T}, x \in U_x, y \in U_y$ existieren sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$. Zwei Punkte können also durch offene Mengen „getrennt“ werden.

Lemma 1.1.7. In einem Hausdorffraum sind kompakte Mengen abgeschlossen.

Beweis. Übung. □

Beispiel 1.1.8. Der euklidische Raum (\mathbb{R}^n, d) ist mit der metrischen Topologie ein topologischer Raum. Er ist hausdorffsch und zweitabzählbar.

Definition 1.1.9 (Stetige Abbildung). Eine Abbildung $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig*, wenn Urbilder offener Mengen offen sind:

$$U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$$

Äquivalent dazu ist, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind (da Komplementbildung mit dem Urbild vertauscht).

Die Topologien werden im Folgenden in der Notation unterdrückt.

Lemma 1.1.10. Die Verkettung stetiger Abbildungen ist stetig.

Beweis. Übung. □

Lemma 1.1.11. Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist kompakt:

$$f: X \rightarrow Y \text{ stetig}, K \subset X \text{ kompakt} \Rightarrow f(K) \subset Y \text{ kompakt}$$

Beweis. Übung. □

Definition 1.1.12 (Homöomorphismus). Ein *Homöomorphismus* ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, die bijektiv ist und ihre Umkehrabbildung stetig.

Beachte: Anders als bei linearen Abbildungen sind hier Bijektivität und Stetigkeit nicht hinreichend.

1.2. Topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 1.2.1. Eine *topologische Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum (M, \mathcal{T}) , der hausdorffsch, zweitabzählbar und *lokal euklidisch* ist, das heißt: Es existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ (Dimension), sodass für alle Punkte $p \in M$ offene Umgebungen $U \subset M, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ und ein Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$ existieren.

Ein solches Tupel (φ, U) heißt *Karte* um p (wobei manchmal die Menge U in der Notation unterdrückt wird). Eine Familie von Karten, die die Mannigfaltigkeit überdecken, heißt *Atlas* \mathcal{A} .

Die Dimension der Mannigfaltigkeit ist per Definition wohldefiniert (da n unabhängig von der Wahl des Punktes existieren muss).

Beispiel 1.2.2.

- (a) Der euklidische Raum \mathbb{R}^n ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, beispielsweise mit dem Atlas $\{(id_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$. Ebenso gilt dies für beliebige offene Teilmengen.
- (b) Offene Teilmengen von topologischen Mannigfaltigkeiten sind topologische Mannigfaltigkeiten.
- (c) Das kartesische Produkt zweier topologischer Mannigfaltigkeiten (der Dimensionen n und m) ist eine topologische Mannigfaltigkeit (der Dimension $n + m$). Die Produkte offener Mengen bilden dabei eine Basis der Topologie des Produktes.
- (d) Für topologische Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension ist die disjunkte Vereinigung eine topologische Mannigfaltigkeit (*topologische Summe*).

Definition 1.2.3. Für zwei Karten $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i, i \in \{1, 2\}$ definiert man den *Kartenwechsel*:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \Big|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

Da die Karten Homöomorphismen sind, sind auch alle Kartenwechsel Homöomorphismen.

Definition 1.2.4 (Differenzierbare Mannigfaltigkeit).

- Zwei Karten sind *verträglich*, wenn ihr Kartenwechsel ein (glatter) Diffeomorphismus ist.

1. Mannigfaltigkeiten

- Ein Atlas ist *differenzierbar*, wenn alle seine Karten paarweise verträglich sind.
- Ein differenzierbarer Atlas heißt *maximal*, wenn es keine Karte gibt, die mit allen Karten des Atlanten verträglich und nicht in ihm enthalten ist.
- Eine *differenzierbare Struktur* auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M ist ein maximaler differenzierbarer Atlas \mathcal{A} und das Tupel (M, \mathcal{A}) heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit*. Wenn im Folgenden von Karten auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit die Rede ist, sind immer solche aus der differenzierbaren Struktur gemeint.

Lemma 1.2.5. Jeder differenzierbare Atlas kann eindeutig zu einem maximalen Atlas fortgesetzt werden.

Beweis. Übung. □

Um eine differenzierbare Struktur anzugeben, reicht es also auch aus, einen nicht-maximalen Atlas anzugeben.

Beispiel 1.2.6.

- Der euklidische Raum \mathbb{R}^n (und seine offenen Teilmengen) sind n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten, der oben genannte Atlas muss dazu aber erweitert werden! Im Folgenden verwenden wir die so definierte differenzierbare Struktur auf \mathbb{R}^n .
- Reelle, endlich-dimensionale Vektorräume sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten.
- Die obigen Beispiele topologischer Mannigfaltigkeiten gelten auch für differenzierbare Mannigfaltigkeiten, allerdings müssen auch hier Atlanten vervollständigt werden.
- Die Sphären $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ sind n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten, die sich nicht mit einer einzelnen Karte überdecken lassen.

1.3. Differenzierbare Abbildungen

Seien von nun an M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.3.1 (Differenzierbarkeit). Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt *glatt*, wenn für alle Punkte $p \in M$ Karten (φ, U) um p und (ψ, V) um $f(p)$ existieren, sodass $f(U) \subset V$ und die folgende Abbildung glatt ist:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V) \tag{1.1}$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte, da Kartenwechsel glatt sind und Verkettungen glatter Abbildungen zwischen Teilmengen des \mathbb{R}^n glatt sind. Äquivalent kann daher auch gefordert werden, dass die obige Abbildung für alle Karten glatt ist.

Wir schreiben $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ für die Menge der glatten Abbildungen. Wir schreiben $\mathcal{C}^\infty(M) := \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ für die Menge der (glatten) Funktionen auf M .

Analog kann man auch k -fach differenzierbare Abbildungen definieren und schreibt für diese $\mathcal{C}^k(M, N)$.

Lemma 1.3.2. Sind $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow L$ glatte Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, so ist auch $g \circ f: M \rightarrow L$ glatt.

Beweis. Übung. □

Definition 1.3.3. Ein *Diffeomorphismus* ist eine bijektive Abbildung $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, für die $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ gilt.

Die Menge der Diffeomorphismen $\text{Diff}(M) \subset \mathcal{C}^\infty(M, M)$ bildet eine Gruppe.

Lemma 1.3.4. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn (φ, U) eine Karte von M ist.

Beweis. Übung. □

1.4. Untermannigfaltigkeiten

Definition 1.4.1. Sei M eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, und sei $0 \leq k \leq n$. Eine k -dimensionale (eingebettete) *Untermannigfaltigkeit* von M ist eine Teilmenge $N \subset M$, sodass es zu jedem Punkt $p \in N$ eine Karte (φ, U) von M um p gibt, sodass

$$\varphi(U \cap N) = \{a \in \varphi(U) \mid a^{k+1} = \dots = a^n = 0\}$$

gilt. Es gibt also Karten (φ, U) von M , bzgl. derer N lokal wie eine k -dimensionale Ebene im \mathbb{R}^n aussieht.

Bemerkung 1.4.2. Ist N eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M , so erhalten wir aus Karten (φ, U) von M wie oben durch

$$\tilde{\varphi} := (\varphi^1, \dots, \varphi^k)$$

Karten $(\tilde{\varphi}, U \cap N)$ von N . Mit diesen ist N selbst eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Inklusionsabbildung $i: N \rightarrow M, i(p) := p$ ist dann eine glatte Abbildung.

Die von diesen Karten induzierte differenzierbare Struktur auf N ist die eindeutige differenzierbare Struktur auf N mit der Eigenschaft, dass i glatt ist.

1. Mannigfaltigkeiten

Einschränkungen von glatten Abbildungen auf Untermannigfaltigkeiten sind glatt:

Lemma 1.4.3. Seien N bzw. L Untermannigfaltigkeiten von M bzw. K . Ist $f: M \rightarrow K$ eine glatte Abbildung mit $f(N) \subset L$, dann ist auch $f|_N: N \rightarrow L$ glatt.

Beweis. Sei $\dim M = m$ etc. Für $p_0 \in N$ wählen wir Karten (φ, U) von M um p_0 bzw. (ψ, V) von K um $f(p_0)$ wie oben, bzgl. derer N bzw. L also lokal die Form $\{p \in M \mid \varphi^{n+1}(p) = \dots = \varphi^m(p) = 0\}$ bzw. $\{q \in K \mid \psi^{l+1}(q) = \dots = \psi^k(q) = 0\}$ haben. Dann sind also $\tilde{\varphi} = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ eine Karte von N und $\tilde{\psi} = (\psi^1, \dots, \psi^l)$ eine Karte von L .

Sei $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ die Kartendarstellung von f bzgl. φ und ψ . Die Kartendarstellung von $f|_N$ bzgl. $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ ist dann gegeben durch

$$(\tilde{\psi} \circ f|_N \circ \tilde{\varphi}^{-1})(a^1, \dots, a^n) = (F^1(a, 0), \dots, F^l(a, 0), 0, \dots, 0).$$

Da F nach Voraussetzung glatt ist, ist also auch $\tilde{\psi} \circ f|_N \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ glatt und wir sind fertig. \square

Äquivalent sind Untermannigfaltigkeiten Mengen, die lokal wie Graphen von glatten Abbildungen aussehen.

Lemma 1.4.4. Sei M eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $0 \leq k \leq n$. $N \subset M$ sei eine Teilmenge, die sich lokal als Graph von glatten Abbildungen $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ schreiben lässt, d. h. zu jedem Punkt $p \in N$ gebe es eine Karte (φ, U) von M um p mit $\varphi(U) = A \times B$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^{n-k}$ offen, und eine glatte Abbildung $F: A \rightarrow B$, sodass

$$\varphi(U \cap N) = \{(a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^{n-k}) \mid b = F(a)\}$$

gilt.

Dann ist N eine k -dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit von M .

Beweis. Wir müssen N lokal als eine Ebene im \mathbb{R}^n darstellen.

Zu $p \in N$ seien dazu $\varphi = (\varphi_A, \varphi_B): U \rightarrow A \times B$ und $F: A \rightarrow B$ wie oben, also φ eine Karte von M mit $\varphi(U \cap N) = \{(a, b) \mid b = F(a)\}$. Die Idee ist, die Karte umzudefinieren, indem man den F -Teil einfach abzieht.

Wir definieren also durch $\tilde{\varphi} := (\varphi_A, \varphi_B - F \circ \varphi_A)$ eine neue Karte $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_A, \tilde{\varphi}_B): U \rightarrow \{(\tilde{a}, \tilde{b}) \mid \tilde{a} \in A, \tilde{b} + F(\tilde{a}) \in B\}$. Nach Definition ist dann $q \in U \cap N \iff \varphi_B(q) = F(\varphi_A(q)) \iff \tilde{\varphi}_B(q) = 0$, also $\tilde{\varphi}(U \cap N) = \{(\tilde{a}, \tilde{b}) \mid \tilde{b} = 0\}$ wie gewünscht.

Wir müssen noch zeigen, dass $\tilde{\varphi}$ tatsächlich eine Karte von M ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist. Da aber $(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(a, b) = (a, b - F(a))$ gilt, ist die Jacobi-Matrix von $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ gegeben durch

$$J(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})\Big|_{(a,b)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & 0 \\ -JF|_a & \mathbb{1}_{n-k} \end{pmatrix}$$

1.4. Untermannigfaltigkeiten

also invertierbar. Nach dem Satz von der inversen Abbildung (Satz 0.2.16) ist $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ damit ein lokaler Diffeomorphismus, da es bijektiv ist, also ein Diffeomorphismus. \square

Beispiel 1.4.5. Die Sphären S^n sind Untermannigfaltigkeiten der euklidischen Räume \mathbb{R}^{n+1} .

2. Der Tangentialraum und das Differential

'Would you tell me, please, which way I ought to go from here?'

'That depends a good deal on where you want to get to,' said the Cat.

'I don't much care where——' said Alice.

'Then it doesn't matter which way you go,' said the Cat.

'——so long as I get somewhere,' Alice added as an explanation.

'Oh, you're sure to do that,' said the Cat, 'if you only walk long enough.'

Alice's Adventures in Wonderland
(LEWIS CARROLL)

2.1. Der Tangentialraum

Wir wollen jetzt die Frage beantworten: Was sind „Richtungen“ auf einer Mannigfaltigkeit?

Eine anschauliche Idee ist wie folgt: Wenn die Mannigfaltigkeit M eingebettet im \mathbb{R}^n ist, können wir uns in jedem Punkt $p \in M$ eine Tangentialebene vorstellen, in der Tangentialvektoren liegen, die den möglichen Richtungen entsprechen, in die man sich bewegen kann, vgl. Abbildung 2.1. Hier entsprechen die möglichen Richtungen am Punkt p also Ableitungen von Kurven in \mathbb{R}^n , die in der Mannigfaltigkeit verlaufen. Aber wie können wir diese intuitive Idee abstrahieren?

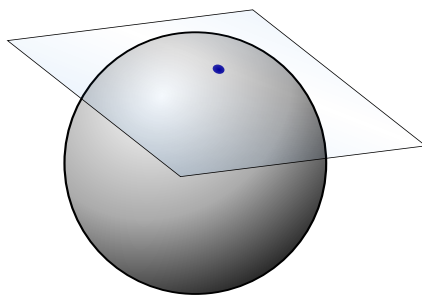


Abbildung 2.1.: Anschauliche Tangentialebene an S^2 in \mathbb{R}^3 .

2. Der Tangentialraum und das Differential

Wir müssen *intrinsisch* über Richtungen in M reden können. Dabei hilft die Beobachtung, dass man das Konzept von Richtungen dazu benutzt, zu beschreiben, wie sich Dinge bei Bewegung in diese Richtung ändern. Die Idee lautet also: Richtung = Richtungsableitung! Wir werden deshalb „Richtungen“ als Ableitungsoperatoren formalisieren. Dabei ist zum Zwecke der Abstraktion zentral, dass Ableitungen eine Produktregel erfüllen und „lokal“ wirken.

Sei im Folgenden M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 2.1.1 (Funktionskeime). Sei $p \in M$. Auf der Menge $X = \{f \in \mathcal{C}^\infty(U) \mid U \subset M \text{ offene Umgebung von } p\}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation \sim , die gegeben ist durch

$$f \sim g :\iff \exists \text{ offene Umgebung } V \text{ von } p \text{ mit } f = g \text{ auf } V.$$

Die Äquivalenzklassen bzgl. dieser Relation heißen *glatte Funktionskeime* an M im Punkt p . Zwei um p definierte Funktionen definieren also genau dann denselben Keim, wenn sie in einer Umgebung von p übereinstimmen.

Den Raum der Funktionskeime an M in p ist also

$$\mathcal{C}_p^\infty(M) := X / \sim.$$

Den Keim zu einer Funktion f schreiben wir als $[f]$. Wenn keine Missverständnisse entstehen können, schreiben wir stattdessen manchmal auch f , um uns Notationsaufwand zu ersparen.

Zu einem Funktionskeim $[f] \in \mathcal{C}_p^\infty(M)$ ist der Funktionswert $[f](p) := f(p)$ wohldefiniert (warum?).

Proposition 2.1.2. $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ ist mit über die Repräsentanten definierter Addition, Skalarmultiplikation und Multiplikation eine \mathbb{R} -Algebra.

Beweis. Übung. □

Definition 2.1.3. Eine *Derivation* von $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ ist eine lineare Abbildung $v: \mathcal{C}_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, die die „Produktregel“

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

erfüllt. Den Raum der Derivationen von $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ nennen wir den *Tangentialraum* T_pM an M im Punkt p ; die Elemente von T_pM heißen auch *Tangentialvektoren* in p .

Der Dualraum von T_pM ist der *Kotangentialraum* $T_p^*M := (T_pM)^*$ an M im Punkt p .

T_pM ist tatsächlich ein Untervektorraum von $(\mathcal{C}_p^\infty(M))^*$ (Übung).

Lemma 2.1.4 (Derivationen verschwinden auf Konstanten). Für alle $v \in T_pM$ und $c \in \mathbb{R}$ ist $v(c) = 0$ (dabei fassen wir c als konstante Funktion bzw. den davon induzierten Funktionskeim auf).

Beweis. Es ist $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1)1(p) + 1(p)v(1) = 2v(1)$, also $v(1) = 0$. Da v linear ist, folgt die Behauptung. \square

Beispiel 2.1.5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $\gamma: I \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $\gamma(s) = p$ für ein $s \in I$. Wir definieren den Tangentialvektor $\dot{\gamma}(s) \in T_p M$ durch

$$(\dot{\gamma}(s))(f) := (f \circ \gamma)'(s),$$

wobei wir auf der rechten Seite die Ableitung der Funktion $f \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ gebildet haben.

$\dot{\gamma}(s)$ leitet also die Funktionskeime, auf die es angewendet wird, entlang der Kurve ab; wir können $\dot{\gamma}(s)$ also als „Geschwindigkeitsvektor“ der Kurve auffassen.

$\dot{\gamma}(s)$ ist wohldefiniert und tatsächlich eine Derivation: Wenn $[f] = [g]$ gilt, dann stimmen f und g in einer Umgebung von p überein, und damit stimmen $f \circ \gamma$ und $g \circ \gamma$ in einer Umgebung von s überein und haben insbesondere dieselbe Ableitung an der Stelle s . Die Linearität von $\dot{\gamma}(s)$ folgt aus der Linearität der Ableitung, und die Derivations-Produktregel folgt aus der Produktregel für Ableitungen.

Der Geschwindigkeitsvektor einer konstanten Kurve ist 0 (Übung!). Später werden wir sehen, dass sich tatsächlich *jeder* Tangentialvektor als Geschwindigkeitsvektor einer Kurve schreiben lässt.

2.2. Das Differential

Mithilfe des Tangentialraumbegriffs können wir nun nicht nur entscheiden, ob Abbildungen differenzierbar sind, sondern auch tatsächlich eine Art Ableitungsbegriff definieren:

Definition 2.2.1. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Das *Differential* von f im Punkt $p \in M$ ist die lineare Abbildung

$$Df|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

definiert durch

$$\left(Df|_p(v) \right) (\alpha) = v(\alpha \circ f)$$

für $v \in T_p M, \alpha \in \mathcal{C}_{f(p)}^\infty(N)$.

Proposition 2.2.2. $Df|_p(v)$ ist tatsächlich wohldefiniert und eine Derivation von $\mathcal{C}_{f(p)}^\infty(N)$, und $Df|_p$ ist linear.

Beweis. Übung. \square

2. Der Tangentialraum und das Differential

Bemerkung 2.2.3. Ist $\gamma: I \rightarrow M$ eine glatte Kurve und $f: M \rightarrow N$ glatt, so ist $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma: I \rightarrow N$ eine Kurve in N . Der Geschwindigkeitsvektor von dieser Kurve zum Zeitpunkt s ist $\dot{\tilde{\gamma}}(s) = Df|_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s))$ (Übung!).

Wenn wir uns auf M also vom Punkt $\gamma(s)$ aus in Richtung $v := \dot{\gamma}(s)$ bewegen, dann bewegt sich unser Bild unter f auf N also in Richtung $Df|_p(v)$. Das Differential beschreibt also in einem sinnvollen Sinne, wie sich „Richtungen“ unter Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten verhalten.

Satz 2.2.4 (Kettenregel). Seien $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow L$ glatte Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, und $p \in M$. Dann gilt

$$D(g \circ f)|_p = Dg|_{f(p)} \circ Df|_p.$$

Beweis. Sei $v \in T_p M$. Für jedes $\alpha \in \mathcal{C}_{g(f(p))}^\infty(L)$ ist

$$\begin{aligned} \left(D(g \circ f)|_p(v) \right) (\alpha) &= v(\alpha \circ (g \circ f)) \\ &= v((\alpha \circ g) \circ f) \\ &= \left(Df|_p(v) \right) (\alpha \circ g) \\ &= \left(Dg|_{f(p)} \left(Df|_p(v) \right) \right) (\alpha), \end{aligned}$$

also gilt $D(g \circ f)|_p(v) = Dg|_{f(p)} \left(Df|_p(v) \right)$. □

Lemma 2.2.5. (a) $D(\text{id}_M)|_p = \text{id}_{T_p M}$

(b) Ist $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, so ist $Df|_p$ für jedes $p \in M$ ein Isomorphismus, und es gilt $Df^{-1}|_{f(p)} = \left(Df|_p \right)^{-1}$.

Beweis. Übung. (Tipp: Verwende die Kettenregel.) □

Proposition 2.2.6. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine offene Teilmenge. Für jedes $p \in U$ ist $T_p U$ kanonisch isomorph zu $T_p M$ vermöge $Di|_p$, wobei $i: U \rightarrow M, i(q) := q$ die Inklusionsabbildung ist.

Beweis. Sei $p \in U$. $Di|_p$ ist definiert über $\left(Di|_p(v) \right) (\alpha) = v(\alpha \circ i)$ für $v \in T_p U$ und $\alpha \in \mathcal{C}_p^\infty(M)$; d. h. $Di|_p(v)$ ist einfach v , nur aufgefasst als Derivation, die Funktionskeime an M ableitet, indem man diese als Funktionskeime an U auffasst. Da Funktionskeime an U in p und Funktionskeime an M in p aber einander entsprechen, ist damit klar, dass $Di|_p$ ein Isomorphismus ist.

Etwas genauer: Jeder Funktionskeim $\tilde{\alpha} \in \mathcal{C}_p^\infty(U)$ kann auch als Keim $\alpha \in \mathcal{C}_p^\infty(M)$ aufgefasst werden, und umgekehrt: Jede offene Umgebung von p in U ist auch offen in M , und jede offene Umgebung von p in M enthält eine offene Umgebung von p in U .

Da bei der Definition von Funktionskeimen um p Funktionen äquivalent sind, wenn sie auf einer offenen Umgebung von p übereinstimmen, spielt es also keine Rolle, ob wir in U oder in M sind („es wird eh alles äquivalent gemacht“)¹.

Diese Abbildung $\mathcal{C}_p^\infty(M) \ni \alpha \mapsto \tilde{\alpha} \in \mathcal{C}_p^\infty(U)$ ist also für $[f]_{p,M} \in \mathcal{C}_p^\infty(M)$, f definiert auf V , gegeben durch $[f]_{p,M} \mapsto [f|_{U \cap V}]_{p,U} \in \mathcal{C}_p^\infty(U)$, was man auch schreiben kann als $[f]_{p,M} \mapsto [f \circ i|_{U \cap V}]_{p,U}$. D. h. das oben beschriebene Auffassen von α als Keim auf der kleineren Mannigfaltigkeit U ist die Abbildung $\mathcal{C}_p^\infty(M) \ni \alpha \mapsto \alpha \circ i \in \mathcal{C}_p^\infty(U)$. Wie oben beschrieben lässt sich das umkehren, ist also ein Isomorphismus. Damit ist aber auch $Di|_p$ ein Isomorphismus, denn es ist definiert als $(Di|_p(v))(\alpha) = v(\alpha \circ i)$. \square

Da $Di|_p(v)$ einfach dieselbe Derivation wie v ist (sie unterscheiden sich nur darin, ob man die Keime, auf die sie wirkt, als Keime an M oder an U betrachtet), werden wir im Folgenden T_pU und T_pM (meistens) miteinander identifizieren.

2.3. Der Tangentialraum eines Vektorraums

Betrachten wir einen endlich-dimensionalen Vektorraum V , so sagt uns die Intuition, dass die Richtungen, in die wir ableiten können, einfach die Richtungen des Vektorraums sein sollten. Wir erwarten also einen kanonischen Isomorphismus $T_pV \cong V$ für alle $p \in V$. Sei im Folgenden V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $p \in V$ ein fester Punkt.

Definition 2.3.1. Für $v \in V$ definieren wir den Tangentialvektor $\partial_v|_p \in T_pV$ durch

$$\partial_v|_p(f) := (\partial_v f)(p) = \left. \frac{df(p+hv)}{dh} \right|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h}.$$

$\partial_v|_p$ ist also einfach die Richtungsableitung in Richtung von v am Punkt p .

Proposition 2.3.2. $\partial_v|_p$ ist tatsächlich eine Derivation von $\mathcal{C}_p^\infty(V)$.

Beweis. $\partial_v|_p$ ist wohldefiniert, denn wenn $[f] = [g]$ gilt, dann stimmen f und g in einer Umgebung von p überein und haben insbesondere dieselben Ableitungen an der Stelle p . Dass Richtungsableitungen linear sind und die Produktregel erfüllen, ist bekannt². \square

Satz 2.3.3. Die Abbildung

$$V \rightarrow T_pV, v \mapsto \partial_v|_p$$

ist ein linearer Isomorphismus.

¹Als Element von $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ besteht der Keim / die Äquivalenzklasse potentiell aus mehr Funktionen, da auch noch Funktionen dazukommen, die auf „größeren“ Umgebungen von p definiert sind.

²Oder folgt schnell aus den entsprechenden Eigenschaften für Ableitungen von Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Der Tangentialraum und das Differential

Beweis. Linearität ist einfach zu zeigen (Übung). Um Surjektivität und Injektivität zu zeigen, fixieren wir eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von V . Sei $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ die dazu duale Basis von V^* , also für $i = 1, \dots, n$ jeweils $\theta^i: V \rightarrow \mathbb{R}$ die lineare Abbildung definiert durch $\theta^i(b_j) = \delta_j^i$ und lineare Fortsetzung.

Für beliebiges $v = \sum_{i=1}^n v^i b_i \in V$ ist

$$\partial_v|_p(\theta^i) = \left. \frac{d\theta^i(p + hv)}{dh} \right|_{h=0} = \left. \frac{d(\theta^i(p) + hv^i)}{dh} \right|_{h=0} = v^i \quad (2.1)$$

für alle i . Falls $\partial_v|_p = 0$ gilt, ist also $v^i = \partial_v|_p(\theta^i) = 0(\theta^i) = 0$, also $v = 0$. Das zeigt, dass der Kern der betrachteten Abbildung nur die 0 enthält, also deren Injektivität. Um die Surjektivität zu zeigen, brauchen wir einen kleinen Trick.

Lemma 2.3.4 (Hadamard-Lemma). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die sternförmig um x_0 ist, und $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Dann gibt es glatte Funktionen $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $i = 1, \dots, n$, sodass

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f_i(x)(x^i - x_0^i).$$

Beweis. Für $x \in U$ setze $y := x - x_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f(x_0 + 1 \cdot y) - f(x_0 + 0 \cdot y) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} f(x_0 + ty) \right) dt \\ \text{(Kettenregel)} \quad &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(x_0 + ty) y^i dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 (\partial_i f)(x_0 + tx - tx_0) dt \right) (x^i - x_0^i). \end{aligned}$$

Mit

$$f_i(x) := \int_0^1 (\partial_i f)(x_0 + tx - tx_0) dt$$

folgt also die Behauptung (die f_i sind glatt wegen Kettenregel und Sätzen über das Differenzieren unter dem Integral). \square

Korollar 2.3.5 (Hadamard-Lemma auf Vektorräumen). Sei $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^n): V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus und sei $\alpha \in \mathcal{C}_p^\infty(V)$. Dann gibt es $\alpha_i \in \mathcal{C}_p^\infty(V)$, $i = 1, \dots, n$ mit

$$\alpha = \alpha(p) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (\theta^i - \theta^i(p)).$$

Beweis. Das ist einfach das Hadamard-Lemma 2.3.4 angewendet auf unseren Vektorraum V , der über θ mit \mathbb{R}^n identifiziert wurde. \square

2.3. Der Tangentialraum eines Vektorraums

Zurück zum Beweis von Satz 2.3.3. Mit dem Hadamard-Lemma können wir jetzt auch zeigen, dass die Abbildung $v \mapsto \partial_v|_p$ surjektiv ist. Seien $w \in T_p V$ und $\alpha \in \mathcal{C}_p^\infty(V)$ beliebig, und seien $\alpha_i \in \mathcal{C}_p^\infty(V)$ zu α mit dem Hadamard-Lemma gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned}
 w(\alpha) &= w\left(\alpha(p) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (\theta^i - \theta^i(p))\right) \\
 (\text{Linearität, } w(\text{const.}) = 0) &= \sum_{i=1}^n w(\alpha_i \cdot (\theta^i - \theta^i(p))) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(w(\alpha_i) \cdot (\theta^i(p) - \theta^i(p)) + \alpha_i(p) \cdot w(\theta^i) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) \cdot w(\theta^i).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Insbesondere gilt damit auch $\partial_v|_p(\alpha) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(p) \cdot \partial_v|_p(\theta^j) \stackrel{(2.1)}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j(p) \cdot v^j$ für beliebige Vektoren $v = \sum_{i=1}^n v^i b_i$. Wir können also $w(\alpha) = \partial_v|_p(\alpha)$ erreichen, indem wir $v := \sum_{i=1}^n w(\theta^i) b_i$ setzen.

Da α beliebig war, gilt also $w = \partial_v|_p$. Wir können also jedes $w \in T_p V$ als Richtungsableitung in Richtung eines Vektors $v \in V$ schreiben. \square

Der Tangentialraum $T_p V$ an einen endlich-dimensionalen Vektorraum V ist also in kanonischer Weise zu V selbst isomorph; ein Vektor $v \in V$ wird dabei mit der Richtungsableitung $\partial_v|_p$ identifiziert.

Bzgl. dieser Identifikation ist der in Beispiel 2.1.5 definierte abstrakte „Geschwindigkeitsvektor“ einer Kurve identisch zur üblichen Ableitung der Kurve als vektorwertige Funktion:

Lemma 2.3.6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge, $s \in I$, $\gamma: I \rightarrow V$ eine Kurve und $p := \gamma(s)$.

Von dieser Kurve können wir einerseits die übliche Ableitung

$$\gamma'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(s+h) - p}{h} \in V$$

bilden; andererseits können wir den abstrakten Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(s) \in T_p V$ bilden.

Bzgl. der kanonischen Identifikation $V \cong T_p V$ ist dann $\gamma'(s) \equiv \dot{\gamma}(s)$.

Beweis. Übung. (Tipp: Verwende die mehrdimensionale Kettenregel für vektorwertige Abbildungen!) \square

Korollar 2.3.7. Auf dem \mathbb{R}^n bilden die partiellen Ableitungsoperatoren $\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$ eine Basis des Tangentialraums $T_p \mathbb{R}^n$.

2. Der Tangentialraum und das Differential

Beweis. $\partial_i|_p$ ist die Richtungsableitung in Richtung des Standardbasisvektors e_i . \square

Korollar 2.3.8. Die Entwicklung eines Tangentialvektors $w \in T_p\mathbb{R}^n$ in dieser Basis ist

$$w = \sum_{i=1}^n w(\text{pr}^i) \partial_i|_p,$$

wobei $\text{pr}^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{pr}^i(a) = a^i$ die Projektion auf die i -te Komponente ist.

Beweis. Das ergibt sich direkt aus dem Beweis von Satz 2.3.3, da die Projektionen pr^i die zu e_i duale Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$ bilden. \square

Beispiel 2.3.9. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in U$, so bilden die partiellen Ableitungsoperatoren $\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$ eine Basis von T_pU (denn es ist ja $T_pU = T_p\mathbb{R}^n$).

Satz 2.3.10 (Differential von linearen Abbildungen). Sei $L: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Bzgl. der Identifikationen $T_pV \equiv V, T_{L(p)}W \equiv W$ ist $DL|_p = L$. Das heißt, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T_pV & \xrightarrow{DL|_p} & T_{L(p)}W \\ \uparrow v \mapsto \partial_v|_p & & \uparrow w \mapsto \partial_w|_{L(p)} \\ V & \xrightarrow{L} & W \end{array}$$

Äquivalent zur obigen Aussage ist also (jetzt ohne Identifizierung) $DL|_p \partial_v = \partial_{L(v)}|_{L(p)}$.

Beweis. Für $v \in V$ ist

$$\begin{aligned} \left(DL|_p \left(\partial_v|_p \right) \right) (f) &= \partial_v|_p (f \circ L) \\ &= \left. \frac{df(L(p + hv))}{dh} \right|_{h=0} \\ &= \left. \frac{df(L(p) + hL(v))}{dh} \right|_{h=0} \\ &= \partial_{L(v)}|_{L(p)} (f) \end{aligned}$$

für beliebige f , also $DL|_p \left(\partial_v|_p \right) = \partial_{L(v)}|_{L(p)}$. Das mussten wir aber zeigen. \square

Beispiel 2.3.11. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge, $s \in I$ und $\partial_1|_s$ der kanonische Ableitungsoperator, der eine Basis von T_sI bildet.

Ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\gamma: I \rightarrow M$ eine glatte Kurve, so können wir das Differential $D\gamma|_s: T_s I \rightarrow T_{\gamma(s)} M$ betrachten. Dieses bildet den Basisvektor $\partial_1|_s$ ab auf die Derivation $D\gamma|_s(\partial_1|_s)$, die wirkt als $(D\gamma|_s(\partial_1|_s))(f) = \partial_1|_s(f \circ \gamma) = \left. \frac{d(f \circ \gamma)(s+h)}{dh} \right|_{h=0} = (f \circ \gamma)'(s)$. Das ist aber genau die Wirkung des in Beispiel 2.1.5 definierten „Geschwindigkeitsvektors“ $\dot{\gamma}(s) \in T_{\gamma(s)} M$, also gilt $D\gamma|_s(\partial_1|_s) = \dot{\gamma}(s)$.

Der „Geschwindigkeitsvektor“ $\dot{\gamma}(s)$ ist also tatsächlich in einem formalen Sinne die Ableitung der Kurve γ an der Stelle s , nämlich das Differential von γ an dieser Stelle angewendet auf den kanonischen Basisvektor von $T_s I$.

Lemma 2.3.12 (Differential von glatten Funktionen als Anwendung der Derivation). Für $f \in C^\infty(M)$ und $v \in T_p M$ ist $Df|_p(v) = v(f)$ unter der kanonischen Identifikation $T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

Beweis. Nach Korollar 2.3.8 ist $Df|_p(v) = (Df|_p(v))(\text{id}) \cdot \partial_1|_{f(p)} \in T_{f(p)} \mathbb{R}$. Da nach Definition $(Df|_p(v))(\text{id}) = v(\text{id} \circ f) = v(f)$ gilt und $\partial_1|_{f(p)}$ unter $T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ mit 1 identifiziert wird, folgt die Behauptung. \square

Definition 2.3.13. Fassen wir für $f \in C^\infty(M)$ das Differential $Df|_p$ wie oben als Abbildung nach \mathbb{R} auf, so schreiben wir es als $df|_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, also $df|_p \in T_p^* M$.

2.4. Koordinatenvektoren

Haben wir auf einer Mannigfaltigkeit M eine Karte (x, U) gegeben, dann ermöglicht sie uns, U mit einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n zu identifizieren. Das gilt auch für die Tangentialräume:

Definition 2.4.1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und (x, U) eine Karte um p . Wir schreiben $V = x(U) \subset \mathbb{R}^n$. Als Abbildung $x: U \rightarrow V$ ist x nach Lemma 1.3.4 ein Diffeomorphismus. Nach Lemma 2.2.5 ist dann also

$$Dx|_p: T_p M \rightarrow T_{x(p)} \mathbb{R}^n$$

ein Isomorphismus, wobei wir die Identifikationen $T_p M = T_p U$, $T_{x(p)} \mathbb{R}^n = T_{x(p)} x(U)$ benutzt haben. Diesen benutzen wir, um aus der kanonischen Basis $\{\partial_i|_{x(p)}\}$ von $T_{x(p)} \mathbb{R}^n$ eine Basis von $T_p M$ zu erhalten: Für $i = 1, \dots, n$ definieren wir

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p := (Dx|_p)^{-1} (\partial_i|_{x(p)}) = Dx^{-1}|_{x(p)} (\partial_i|_{x(p)})$$

Die $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ heißen die von x induzierten Koordinatenvektoren in p , zusammen bilden sie die von x induzierte Koordinatenbasis von $T_p M$.

Korollar 2.4.2. $\dim T_p M = \dim M$ \square

2. Der Tangentialraum und das Differential

Die Koordinatenvektoren wirken durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) = \partial_i|_{x(p)} (f \circ x^{-1}) = \left(\partial_i (f \circ x^{-1}) \right) (x(p)).$$

$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ stellt also einen Funktionskeim in der Karte x dar und bildet die i -te partielle Ableitung dieser Kartendarstellung.

Bemerkung 2.4.3. Wenn wir in Koordinaten rechnen wollen, schreiben wir Karten meist als $x = (x^1, \dots, x^n)$ o. ä. statt als φ o. ä., da das zur historisch etablierten Notation von Koordinatenvektoren passt. Die Funktionen x^i nennt man dann auch *Koordinatenfunktionen*, die $x^i(p)$ sind die *Koordinaten* von p .

Aufpassen muss man dann allerdings manchmal, wenn man Punkte im \mathbb{R}^n auch als x schreibt (deshalb haben wir das oben auch eher vermieden). Manchmal tut man das aber auch ganz bewusst und schreibt sowohl die Karte als auch die Punkte in ihrem Wertebereich als x : Für die „Kartendarstellung“ einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ schreibt man dann beispielsweise statt $(f \circ x^{-1})(a) = \sin(a^3) + a^1 \cdot a^2$ direkt $f(x) = \sin(a^3) + a^1 \cdot a^2$. Das ist anfangs allerdings sehr verwirrend, deshalb vermeiden wir diesen *abuse of notation* weitgehend.

Beispiel 2.4.4. Für eine Karte (x, U) um p sind die Komponenten $x^i, i = 1, \dots, n$ reellwertige glatte Funktionen auf U , können also als Funktionskeime in p aufgefasst werden. Wendet man darauf die Koordinatenvektoren an, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^j) &= \left(\partial_i (x^j \circ x^{-1}) \right) (x(p)) \\ &= \underbrace{\left(\partial_i \text{pr}^j \right)}_{=\delta_i^j} (x(p)) = \delta_i^j, \end{aligned}$$

wobei $\text{pr}^j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{pr}^j(a) = a^j$ die Projektion auf die j -te Komponente ist.

Für die Kovektoren $dx^i|_p \in T_p^*M$ gilt also $dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i$. Damit haben wir gezeigt:

Lemma 2.4.5. Die zur von x induzierten Koordinatenbasis von T_pM duale Basis von T_p^*M ist gegeben durch die Differentiale $\{dx^i|_p\}$. \square

Lemma 2.4.6 (Koordinatendarstellung von Tangentialvektoren). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M, v \in T_pM$ und x eine Karte um p . Die Darstellung von v in der von x induzierten Koordinatenbasis ist

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

mit

$$v^i = v(x^i).$$

Beweis. Nach Korollar 2.3.8 lässt sich $Dx|_p(v) \in T_{x(p)}\mathbb{R}^n$ schreiben als $Dx|_p(v) = \sum_{i=1}^n (Dx|_p(v))(\text{pr}^i) \partial_i|_{x(p)}$. Da nach Definition $(Dx|_p(v))(\text{pr}^i) = v(\text{pr}^i \circ x) = v(x^i)$ ist, haben wir also $Dx|_p(v) = \sum_{i=1}^n v(x^i) \partial_i|_{x(p)}$. Anwenden von $(Dx|_p)^{-1}$ auf beiden Seiten liefert die Behauptung. \square

Notation 2.4.7 (Einstein'sche Summenkonvention). Da bei Rechnungen in Koordinaten oder bzgl. Basen oft Summen der Form

$$\sum_{i=1}^n v^i b_i$$

auftreten, vereinbaren wir, um die Notation zu verkürzen, dass in Zukunft bei solchen Summationen das Summenzeichen weggelassen werden kann; stattdessen schreiben wir in Zukunft also

$$v^i b_i.$$

Immer, wenn in einem Term ein Index zweimal vorkommt, einmal oben an einem Symbol und einmal unten, wird dieser Term über alle im jeweiligen Kontext möglichen Werte des Index aufsummiert. Ein komplizierteres Beispiel für einen Ausdruck in Summenkonvention und seine Bedeutung ist

$$T_{kl}^{ij} S_j^k v^l b_i = \sum_{i,j,k,l=1}^n T_{kl}^{ij} S_j^k v^l b_i.$$

Die Komponenten von Tangentialvektoren schreiben wir mit oberen Indizes, Basisvektoren des Tangentialraums dementsprechend mit unteren Indizes. Einen oberen Index, der wie in $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ „im Nenner“ steht, fassen wir dementsprechend als unteren Index auf.

Mit Summenkonvention lautet die obigen Entwicklungsformel also

$$v = v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

Lemma 2.4.8 (Differential in Kartendarstellung). Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Sei $p \in M$, x eine Karte von M um p und y eine Karte von N um $f(p)$. Dann ist die Darstellungsmatrix des Differentials $Df|_p$ bzgl. der Koordinatenbasen $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ von $T_p M$ und $\frac{\partial}{\partial y^i}|_{f(p)}$ von $T_{f(p)} N$ die Jacobi-Matrix der Kartendarstellung $y \circ f \circ x^{-1}$ von f an der Stelle $x(p)$, also die Matrix

$$(Df|_p)_j^i = \left(J(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} \right)_j^i = \left(\partial_j (y \circ f \circ x^{-1})^i \right) (x(p)).$$

2. Der Tangentialraum und das Differential

Beweis. Übung. □

Definition 2.4.9. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und (x, U) eine Karte. Für $f \in C^\infty(U)$ definieren wir die Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^\infty(U)$ durch

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f).$$

Manchmal nennen wir diese Funktionen die *partiellen Ableitungen* von f bzgl. der Karte x , wobei das natürlich *abuse of language* ist.

Mit dieser Notation ist die Darstellungsmatrix des Differentials aus Lemma 2.4.8 also

$$\left[\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}(p) \right]_{ij}.$$

Lemma 2.4.10 (Transformationsformel für Tangentialvektoren). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und seien x, \tilde{x} zwei Karten um p . Für die Koordinatenvektoren gilt

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \right|_p = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p.$$

Die Basiswechselmatrix ist also die Jacobi-Matrix des inversen Kartenwechsels $x \circ \tilde{x}^{-1}$ (an der Stelle $\tilde{x}(p)$).

Für die Komponenten eines Tangentialvektors $v = v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = \tilde{v}^i \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \right|_p$ gilt dementsprechend

$$\tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) v^i.$$

Beweis. Übung. □

2.5. Ableitungen von Kurven

Bemerkung 2.5.1. Für eine offene Menge $I \subset \mathbb{R}$ schreibt man die kanonische Karte $\text{id}_I: I \rightarrow I$ oft als t und den davon induzierten Koordinatenvektor dann als $\left. \frac{d}{dt} \right|_s \in T_s I$. Das ist natürlich einfach der normale Ableitungsoperator an der Stelle s , den wir oben schon als $\partial_1|_s$ geschrieben haben. Für eine glatte Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ ist also (vgl. Beispiel 2.3.11)

$$\dot{\gamma}(s) = D\gamma|_s \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_s \right).$$

Statt $\dot{\gamma}(s)$ schreiben wir für die Ableitung einer Kurve an der Stelle s in Zukunft auch

$$\dot{\gamma}(s) = \left. \frac{d}{dt} \gamma(t) \right|_{t=s}.$$

Mit der Kettenregel folgt, dass

$$\dot{\gamma}(s) = \left. \frac{d}{dt} \gamma(s+t) \right|_{t=0}$$

gilt.

Mit dieser Schreibweise nimmt die Identifikation eines endlich-dimensionalen Vektorraums mit seinem Tangentialraum eine sehr suggestive Form an:

Lemma 2.5.2. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $p, v \in V$. Die Identifikation $V \cong T_p V$ lässt sich schreiben als

$$V \ni v \cong \left. \frac{d}{dt} (p + tv) \right|_{t=0} \in T_p V.$$

Beweis. Übung. □

Die folgende Form der Kettenregel ist oft sehr hilfreich.

Lemma 2.5.3 (Kettenregel für Ableitungen von Kurven). Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von 0, $\gamma: I \rightarrow M$ eine glatte Kurve und $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann gilt

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = Df|_{\gamma(0)} \left(\left. \frac{d}{dt} \gamma(t) \right|_{t=0} \right).$$

Beweis. Mit der obigen Bemerkung folgt das direkt aus der Kettenregel. □

Lemma 2.5.4 (Koordinatenvektoren sind Ableitungen von Koordinatenlinien). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und (x, U) eine Karte um p . Sei $i \in \{1, \dots, n\}$.

Für genügend kleine t liegt $x(p) + te_i$ in $x(U) \subset \mathbb{R}^n$, d. h. $t \mapsto x^{-1}(x(p) + te_i)$ ist eine Kurve durch p in U . Dies ist gerade die i -te *Koordinatenlinie* durch p , d. h. die Kurve durch p , entlang derer die Koordinate x^i variiert und die anderen Koordinaten $x^j, j \neq i$ konstant bleiben.

Die Ableitung dieser Koordinatenlinie ist der i -te Koordinatenvektor,

$$\left. \frac{d}{dt} x^{-1}(x(p) + te_i) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p.$$

Beweis. Übung. □

Damit kann man jetzt sehr leicht zeigen, dass jeder Tangentialvektor sich als Ableitung einer Kurve schreiben lässt.

Lemma 2.5.5. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Jeder Tangentialvektor $v \in T_p M$ ist Ableitung einer Kurve.

2. Der Tangentialraum und das Differential

Beweis. Übung. □

Damit haben wir jetzt also drei äquivalente Sichtweisen auf Tangentialvektoren: Wir können sie auffassen als Derivationen von Funktionskeimen, als Ableitungen von Kurven oder als Tupel von Komponenten in einer Kartendarstellung, die sich unter Kartenwechsel in gewisser Weise transformieren. Je nach Anwendungsfall sind diese Sichtweisen verschieden vorteilhaft, und wir werden mal die eine, mal die andere benutzen.

2.6. Eigenschaften von differenzierbaren Abbildungen

Definition 2.6.1. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

(a) Der *Rang* von $f \in C^\infty(M, N)$ im Punkt $p \in M$ ist der Rang des Differentials $Df|_p$,

$$\text{rk}_p f := \text{rk } Df|_p.$$

(b) Eine *Immersion* ist eine Abbildung $f \in C^\infty(M, N)$, deren Differential $Df|_p$ an jedem Punkt $p \in M$ injektiv ist. In diesem Fall ist insbesondere $\dim M \leq \dim N$, und $\text{rk}_p f = \dim M$ für alle $p \in M$ (warum?).

(c) Eine *Submersion* ist eine Abbildung $f \in C^\infty(M, N)$, deren Differential $Df|_p$ an jedem Punkt $p \in M$ surjektiv ist. In diesem Fall ist insbesondere $\dim M \geq \dim N$, und $\text{rk}_p f = \dim N$ für alle $p \in M$ (warum?).

Unter einer Immersion werden also unabhängige Richtungen auf unabhängige Richtungen abgebildet.

Satz 2.6.2 (Tangentialraum von Untermannigfaltigkeiten). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Dann ist die Inklusionsabbildung $i: N \rightarrow M, i(p) := p$ eine Immersion.

Beweis. Sei $p \in N$ und sei (x, U) , $x = (x^1, \dots, x^n)$ eine Karte von M um p , sodass $U \cap N$ durch $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$ gegeben ist (solche Karten gibt es nach Definition von Untermannigfaltigkeiten). Dann definiert $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k) := (x^1, \dots, x^k)$ eine Karte (\tilde{x}, \tilde{U}) von N um p .

Die Kartendarstellung $x \circ i \circ \tilde{x}^{-1}: \tilde{U} \rightarrow U$ von i bzgl. dieser Karten ist dann aber gegeben durch $\mathbb{R}^k \supset \tilde{U} \ni (a^1, \dots, a^k) \mapsto (a^1, \dots, a^k, 0, \dots, 0) \in U \subset \mathbb{R}^n$. Die Jacobi-Matrix dieser Abbildung ist also die $n \times k$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

deren Kern offensichtlich $\{0\}$ ist. Das ist aber die Darstellungsmatrix des Differentials $Di|_p$, dieses ist also injektiv. □

Über das Differential der Inklusion können wir den Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ also kanonisch mit einem Unterraum des Tangentialraums an M identifizieren, $T_p N \subset T_p M$. Anschaulich ist das klar: Liegt N in M , so sind die Richtungen entlang von N spezielle Richtungen in M .

Satz 2.6.3 (Satz von der inversen Abbildung für Mannigfaltigkeiten). Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Ist $Df|_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ein Isomorphismus, dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus um p , d. h. es gibt eine offene Umgebung $U \subset M$ von p , sodass $f|_U: U \rightarrow f(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Das folgt, indem man den Satz von der inversen Abbildung auf die Kartendarstellung von f anwendet. \square

Eine der wichtigsten Methoden, neue Mannigfaltigkeiten zu erhalten, ist der sogenannte *Satz vom regulären Wert*. Dieser gibt ein vergleichsweise einfaches Kriterium dafür an, dass eine Teilmenge einer gegebenen Mannigfaltigkeit eine Untermannigfaltigkeit ist.

Definition 2.6.4. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\dim M \geq \dim N$, und sei $f \in C^\infty(M, N)$.

- (a) Ein *kritischer Punkt* von f ist ein Punkt $p \in M$ mit $\text{rk}_p f < \dim N$.
- (b) Ein *regulärer Punkt* von f ist ein Punkt $p \in M$ mit $\text{rk}_p f = \dim N$ (es liegt also maximaler Rang in p vor, $Df|_p$ ist surjektiv).
- (c) Ein *regulärer Wert* von f ist ein Wert $q \in N$, in dessen Urbild $f^{-1}(\{q\}) \subset M$ keine kritischen Punkte liegen (das Urbild besteht also aus regulären Punkten oder ist leer). Ansonsten ist q ein *kritischer Wert*.

Satz 2.6.5 (Satz vom regulären Wert). Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\dim M \geq \dim N$, und sei $q \in N$ ein regulärer Wert von $f \in C^\infty(M, N)$. Dann ist das Urbild $S := f^{-1}(\{q\}) \subset M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M mit Dimension $\dim S = \dim M - \dim N$. Für die Tangentialräume gilt dabei

$$T_p S = \ker (Df|_p) \subset T_p M$$

für alle $p \in S$.

Beweis. Falls S leer ist, ist nichts zu zeigen. Sei also S nichtleer. Außerdem setzen wir $m := \dim M, n := \dim N$ und wählen eine Karte (y, V) , $y = (y^1, \dots, y^n)$ von N um q mit $y(q) = 0$.

Sei nun $p \in S$ und (x, U) eine Karte von M um p . Die lokale Kartendarstellung von f ist $F := y \circ f \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow y(V)$. Für $\tilde{p} \in U$ gilt also $\tilde{p} \in S \iff f(\tilde{p}) = q \iff F(x(\tilde{p})) = 0$.

2. Der Tangentialraum und das Differential

Da nach Voraussetzung p ein regulärer Punkt ist, hat $Df|_p$ maximalen Rang n , d. h. die Jacobi-Matrix

$$JF|_{x(p)} = \begin{pmatrix} \partial_1 F^1 & \dots & \partial_n F^1 & \partial_{n+1} F^1 & \dots & \partial_m F^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F^n & \dots & \partial_n F^n & \partial_{n+1} F^n & \dots & \partial_m F^n \end{pmatrix} (x(p))$$

hat Rang n . oBdA können wir annehmen, dass die ersten n Spalten dieser Matrix linear unabhängig sind (durch Vertauschen von Spalten, d. h. Vertauschen von Komponenten von x). Das bedeutet aber, dass die linke $n \times n$ -Teilmatrix invertierbar ist. Nach dem Satz von der impliziten Funktion (Satz 0.2.17) lässt sich also die Gleichung $F(a, b) = 0$ für $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^{m-n}$ in einer Umgebung von $x(p)$ nach a auflösen, d. h. es gibt eine lokal definierte glatte Abbildung $G: \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(a, b) = 0 \iff a = G(b)$. Wir haben S also lokal um p als Graph der glatten Abbildung G dargestellt; nach Lemma 1.4.4 ist S also eine eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - n$.

Nun wollen wir noch die Tangentialräume an S charakterisieren. Sei also $p \in S$ und $v \in T_p S \subset T_p M$ (wobei wir $v \equiv Di|_p(v) \in T_p M$ identifiziert haben). Da sich v als Ableitung einer Kurve $\gamma: I \rightarrow S$ schreiben lässt, $v = \dot{\gamma}(0)$, erhalten wir nach Kettenregel $Df|_p(v) = Df|_p\left(\left.\frac{d}{dt}\gamma(t)\right|_{t=0}\right) = \left.\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}q\right|_{t=0} = 0$. Das zeigt $T_p S \subset \ker(Df|_p)$. Aus Dimensionsgründen folgt die Gleichheit. \square

3. Multilineare Algebra: Das Tensorprodukt

Mathematics is the art of giving the same name to different things.

HENRI POINCARÉ

3.1. Das Tensorprodukt von Vektorräumen

Definition 3.1.1. Seien V, W zwei Vektorräume.

(a) Das *Tensorprodukt* $V \otimes W$ ist ein Vektorraum, der wie folgt definiert wird:

Die Elemente von $V \otimes W$ sind formale Summen von formalen Ausdrücken der Form $v \otimes w$ mit $v \in V, w \in W$, d. h.

$$V \otimes W = \left\{ \sum_{i=1}^k v_i \otimes w_i \mid k \in \mathbb{N}, v_i \in V, w_i \in W \right\}.$$

Die formalen Ausdrücke haben dabei genau die folgenden Eigenschaften:

- (i) $v \otimes (w + \tilde{w}) = v \otimes w + v \otimes \tilde{w}$ für alle $v \in V$ und $w, \tilde{w} \in W$
- (ii) $(v + \tilde{v}) \otimes w = v \otimes w + \tilde{v} \otimes w$ für alle $v, \tilde{v} \in V$ und $w \in W$
- (iii) $(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$ für alle $v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{R}$

Das „genau“ bedeutet dabei, dass zwei Ausdrücke, die nicht mithilfe dieser Eigenschaften ineinander umgeformt werden können, auch wirklich verschieden sind.

Wir definieren auf $V \otimes W$ eine Skalarmultiplikation durch

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^k v_i \otimes w_i \right) := \sum_{i=1}^k (\lambda v_i) \otimes w_i = \sum_{i=1}^k v_i \otimes \lambda(w_i).$$

Damit wird $V \otimes W$ zu einem Vektorraum. Die Elemente von $V \otimes W$ nennt man *Tensoren*.

- (b) $v \otimes w \in V \otimes W$ nennt man das *Tensorprodukt* von v und w .
- (c) Ein Tensor $x \in V \otimes W$ heißt *einfach*, wenn er in der Form $x = v \otimes w$ geschrieben werden kann.

3. Multilineare Algebra: Das Tensorprodukt

Das Tensorprodukt $V \otimes W$ ist also gewissermaßen die „allgemeinst-mögliche“ Art, die Elemente von V und von W bilinear zu kombinieren: Die Elemente von $V \otimes W$ sind „bilineare Kombinationen“ von denen von V und W , und mehr als das gilt auch nicht.

Lemma 3.1.2. Seien V, W zwei Vektorräume.

- (a) Die Abbildung $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes W, (v, w) \mapsto v \otimes w$ ist bilinear.
- (b) Ist $\{b_i\}_{i \in I}$ eine Basis von V und $\{c_j\}_{j \in J}$ eine Basis von W , dann ist $\{b_i \otimes c_j\}_{i \in I, j \in J}$ eine Basis von $V \otimes W$. Insbesondere ist $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.
- (c) Sei X ein weiterer Vektorraum. Eine lineare Abbildung $f: V \otimes W \rightarrow X$ ist genau dann injektiv, wenn $f(u) = 0 \implies u = 0$ für alle einfachen Tensoren $u = v \otimes w \in V \otimes W$ gilt.

Beweis. Übung. □

Dass die Abbildung $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes W$ die „allgemeinst-mögliche bilineare Abbildung“ auf $V \times W$ ist, zeigt sich in der folgenden universellen Eigenschaft:

Satz 3.1.3 (Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts). Seien V, W, X Vektorräume. Die Abbildung $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes W$ erfüllt die folgende Eigenschaft:

Zu jeder bilinearen Abbildung $B: V \times W \rightarrow X$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $f_B: V \otimes W \rightarrow X$ mit $B(v, w) = f_B(v \otimes w) \forall v \in V, w \in W$.

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\
 \downarrow B & \swarrow \exists! f_B & \\
 X & &
 \end{array}$$

Beweis. Da f_B linear sein soll und $f_B(v \otimes w) = B(v, w)$ gelten soll, muss

$$f_B \left(\sum_{i=1}^k v_i \otimes w_i \right) = \sum_{i=1}^k f_B(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^k B(v_i, w_i)$$

gelten. Damit ist f_B aber eine wohldefinierte Abbildung $V \otimes W \rightarrow X$ (Übung!) und tatsächlich linear (Übung!). □

Anders gesagt kann man also eine lineare Abbildung $f: V \otimes W \rightarrow X$ eindeutig durch $f(v \otimes w) := B(v, w)$ und lineare Fortsetzung definieren, wenn $B(v, w)$ ein bilinearer Ausdruck ist.

3.1. Das Tensorprodukt von Vektorräumen

Bemerkung 3.1.4. Durch die universelle Eigenschaft ist das Tensorprodukt eindeutig festgelegt bis auf eindeutige Isomorphie. D.h.: Ist $\theta: V \times W \rightarrow Y$ eine bilineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass es zu jedem bilinearen $B: V \times W \rightarrow X$ eine eindeutige lineare Abbildung $f: Y \rightarrow X$ mit $B(v, w) = f(\theta(v, w))$ gibt, so existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\Phi: V \otimes W \rightarrow Y$ mit $\Phi \circ \otimes = \theta$.

Lemma 3.1.5. (a) $V \otimes \mathbb{R}$ ist kanonisch isomorph zu V via

$$v \otimes \lambda \mapsto \lambda v.$$

(b) $V \otimes W$ ist kanonisch isomorph zu $W \otimes V$ via

$$v \otimes w \mapsto w \otimes v.$$

Beweis. Übung. □

Definition 3.1.6. Seien V_1, V_2, W_1, W_2 Vektorräume und $f_i: V_i \rightarrow W_i$ für $i = 1, 2$ lineare Abbildungen. Wir definieren die lineare Abbildung $f_1 \otimes f_2: V_1 \otimes V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$ durch

$$(f_1 \otimes f_2)(v_1 \otimes v_2) := f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)$$

und lineare Fortsetzung.

$f_1 \otimes f_2$ heißt das *Tensorprodukt* von f_1 und f_2 .

Definition 3.1.7. Analog zu Tensorprodukten mit zwei Faktoren definiert man Tensorprodukte mit mehreren Faktoren: Für Vektorräume V_1, \dots, V_k besteht $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ aus formalen Summen von Ausdrücken der Form $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ genau so, dass die Abbildung $V_1 \times \dots \times V_k \ni (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ in jedem Argument linear ist. Es gilt eine universelle Eigenschaft für k -lineare Abbildungen analog zur obigen.

Oft schreibt man auch kurz $\bigotimes_{i=1}^k V_k = V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ etc.

Für „Tensorpotenzen“, also Tensorprodukte eines Vektorraums mit sich selbst, schreiben wir auch $V^{\otimes k} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-mal}}$ wobei wir $V^{\otimes 0} := \mathbb{R}$ setzen.

Außerdem setzen wir $V^{(r,s)} := V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ und nennen Elemente davon *Tensoren vom Typ (r, s) über V* .

Definition 3.1.8 (Kontraktion). Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $r, s \in \mathbb{N}$. Für $1 \leq t \leq r$ und $1 \leq u \leq s$ definieren wir die *Kontraktion* $C_{t,u}: V^{(r,s)} \rightarrow V^{(r-1,s-1)}$ durch

$$\begin{aligned} C_{t,u}(v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s) \\ := \eta_u(v_t) \cdot v_1 \otimes \dots \widehat{\otimes v_t \otimes} \dots \otimes v_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \widehat{\otimes \eta_u \otimes} \dots \otimes \eta_s \end{aligned}$$

und lineare Fortsetzung, wobei auf der rechten Seite $\widehat{\otimes X \otimes}$ bedeutet, dass der entsprechende Term ausgelassen wird.

Für einfache Tensoren wird bei der Kontraktion $C_{t,u}$ also der t -te Vektor in die u -te Linearform eingesetzt.

3. Multilineare Algebra: Das Tensorprodukt

Bemerkung 3.1.9. Über $(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes v \otimes w$ (und lineare Fortsetzung) sind $(U \otimes V) \otimes W$ und $U \otimes V \otimes W$ kanonisch isomorph; analog gilt das natürlich auch für mehr Faktoren.

Im Folgenden identifizieren wir auf diese Weise iterierte binäre Tensorprodukte mit mehrfachen Tensorprodukten.

Damit können wir auch kanonisch

$$\begin{aligned} V^{(r,s)} \otimes V^{(t,u)} &\equiv (V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}) \otimes (V^{\otimes t} \otimes (V^*)^{\otimes u}) \\ &\equiv (V^{\otimes r} \otimes V^{\otimes t}) \otimes ((V^*)^{\otimes s} \otimes (V^*)^{\otimes u}) \\ &\equiv V^{(r+t,s+u)} \end{aligned}$$

identifizieren, sodass der Raum aller Tensoren über V mit dem Tensorprodukt eine \mathbb{R} -Algebra bildet:

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} V^{(r,s)}$$

Bemerkung 3.1.10 (Bonus: Formale Konstruktion). Die obige informelle Definition 3.1.1 lässt sich auch als komplett formale Konstruktion ausdrücken: Man betrachtet den freien Vektorraum Z über der Menge $V \times W$. Wir definieren die Teilmengen $A, B, C, D \subset Z$ als

$$\begin{aligned} A &:= \{(v, w + \tilde{w}) - (v, w) - (v, \tilde{w}) \mid v \in V \text{ und } w, \tilde{w} \in W\}, \\ B &:= \{(v + \tilde{v}, w) - (v, w) - (\tilde{v}, w) \mid v, \tilde{v} \in V \text{ und } w \in W\}, \\ C &:= \{(\lambda v, w) - \lambda(v, w) \mid v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{R}\}, \\ D &:= \{(v, \lambda w) - \lambda(v, w) \mid v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

und definieren $V \otimes W$ als den Quotientenraum

$$V \otimes W := Z / \text{span}(A \cup B \cup C \cup D).$$

Für $v \in V, w \in W$ ist $v \otimes w \in V \otimes W$ dann gegeben als das Bild von $(v, w) \in Z$ unter der Quotientenprojektion $Z \rightarrow V \otimes W$.

Das bedeutet aber genau dasselbe wie die obige Definition, und die ist einfacher zu verstehen.

3.2. Tensoren als multilineare Abbildungen

Lemma 3.2.1. Seien V, W Vektorräume. Wir definieren eine lineare Abbildung

$$\Psi: V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$$

über

$$[\Psi(\eta \otimes w)](v) := \eta(v) \cdot w$$

und lineare Fortsetzung. Ψ ist injektiv, und das Bild von Ψ ist die Menge der linearen Abbildungen $V \rightarrow W$ mit endlichem Rang.

Wir können Tensoren in $V^* \otimes W$ also als lineare Abbildungen $V \rightarrow W$ (mit endlichem Rang) auffassen.

Beweis. Für $\eta \in V^*$ und $w \in W$ ist $F(\eta, w) := (V \ni v \mapsto \eta(v) \cdot w \in W)$ wirklich ein Element von $\text{Hom}(V, W)$. Außerdem ist der Ausdruck $F(\eta, w)$ offensichtlich in beiden Argumenten linear; also definiert Ψ tatsächlich eine lineare Abbildung $\Psi: V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$.

Ψ ist injektiv: Ist $\Psi(\eta \otimes w) = 0$, so ist $0 = \eta(v) \cdot w$ für alle $v \in V$. Dann ist also $w = 0$ oder $\eta(v) = 0$ für alle $v \in V$, also $w = 0$ oder $\eta = 0$. Das heißt aber $\eta \otimes w = 0$. Mit Lemma 3.1.2 (c) folgt die Injektivität.

Da $\Psi(\eta \otimes w)$ den Rang 0 oder 1 hat (warum?), hat $\Psi\left(\sum_{i=1}^k \eta_i \otimes w_i\right) \in \text{Hom}(V, W)$ maximalen Rang k ; also hat $\Psi(u)$ endlichen Rang für jedes $u \in V^* \otimes W$.

Ist umgekehrt $f \in \text{Hom}(V, W)$ von endlichem Rang k , so können wir eine Basis $\{w_1, \dots, w_k\}$ von $\text{im}(f)$ wählen und $\eta_i \in V^*$, $i = 1, \dots, k$ durch die Gleichung $f(v) =: \sum_{i=1}^k \eta_i(v) \cdot w_i$ für $v \in V$ definieren (Übung: mache dir klar, dass die so definierten η_i wirklich linear sind, also warum wir sie als Elemente des Dualraums wählen können!), sodass wir $f = \Psi\left(\sum_{i=1}^k \eta_i \otimes w_i\right) \in \text{im}(\Psi)$ sehen. \square

Korollar 3.2.2. Ist V oder W endlich-dimensional, dann sind $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$ kanonisch isomorph. \square

Notation 3.2.3. Im Folgenden fassen wir Tensoren in $V^* \otimes W$ oft direkt als lineare Abbildungen $V \rightarrow W$ auf, d. h. wir unterdrücken Ψ und schreiben direkt

$$(\eta \otimes w)(v) = \eta(v) \cdot w.$$

Bemerkung 3.2.4. Analog kann man Tensoren in $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^* \otimes W$ als k -lineare Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ auffassen via

$$(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_k \otimes w)(v_1, \dots, v_k) := \eta_1(v_1) \cdot \dots \cdot \eta_k(v_k) \cdot w$$

und linearer Fortsetzung. Sind die V_i und W endlich-dimensional, dann erhält man auf diese Weise auch jede k -lineare Abbildung.

Für den Fall $W = \mathbb{R}$ erhalten wir, dass die Elemente von $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ den k -linearen Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{R}$ entsprechen.

Insbesondere kann man beispielsweise zwei multilineare Abbildungen $A: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ und $B: V^l \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen als Tensoren $A \in (V^*)^{\otimes k}$ und $B \in (V^*)^{\otimes l}$, deren Tensorprodukt

$$A \otimes B \in \underbrace{(V^* \otimes \dots \otimes V^*)}_{k\text{-mal}} \otimes \underbrace{(V^* \otimes \dots \otimes V^*)}_{l\text{-mal}} \cong (V^*)^{\otimes k+l}$$

3. Multilineare Algebra: Das Tensorprodukt

wiederum als $k + l$ -lineare Abbildung $V^{k+l} \rightarrow \mathbb{R}$ gesehen werden kann. Für diese gilt dann

$$(A \otimes B)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = A(v_1, \dots, v_k) \cdot B(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$

(denn das gilt für den Fall, dass A und B einfache Tensoren sind, nach Definition der Identifikationen, und folgt damit für den allgemeinen Fall, da diese linear auf die gesamten Tensorprodukte fortgesetzt wurden).

Bemerkung 3.2.5. Elemente von $V_1 \otimes \dots \otimes V_k \otimes W$ kann man via

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes w)(\eta_1, \dots, \eta_k) := \eta_1(v_1) \cdot \dots \cdot \eta_k(v_k) \cdot w$$

als multilineare Abbildungen $V_1^* \times \dots \times V_k^* \rightarrow W$ auffassen. Unter der bekannten Identifikation $V_i^{**} \equiv V_i$ im endlich-dimensionalen Fall entspricht das genau der Identifikation

$$V_1^{**} \otimes \dots \otimes V_k^{**} \otimes W \equiv \text{Mult}(V_1^*, \dots, V_k^*; W)$$

aus der vorherigen Bemerkung.

Zusammengefasst haben wir also:

Satz 3.2.6. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. $V^{(r,s)}$ ist kanonisch isomorph zum Raum der multilinearen Abbildungen $\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$\begin{aligned} (v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s)(\omega_1, \dots, \omega_r, w_1, \dots, w_s) \\ = \omega_1(v_1) \cdot \dots \cdot \omega_r(v_r) \cdot \eta_1(w_1) \cdot \dots \cdot \eta_s(w_s). \end{aligned}$$

und linearer Fortsetzung.

Bzgl. dieser Auffassung von Tensoren als multilineare Abbildungen ist das Tensorprodukt von $S \in V^{(r,s)}$, $T \in V^{(t,u)}$ gegeben als

$$\begin{aligned} (S \otimes T)(\eta_1, \dots, \eta_r, \omega_1, \dots, \omega_t, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_u) \\ = S(\eta_1, \dots, \eta_r, v_1, \dots, v_s) \cdot T(\omega_1, \dots, \omega_t, w_1, \dots, w_u), \end{aligned}$$

wobei wir $V^{(r,s)} \otimes V^{(t,u)} \equiv V^{(r+t,s+u)}$ identifiziert haben. □

3.3. Rechnungen in Komponenten

Definition 3.3.1. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $\{e_i\}$ eine Basis von V und $\{\theta^i\}$ die dazu duale Basis von V^* . Eine Basis von $V^{(r,s)} = V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ ist dann gegeben durch $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_s}\}$.

Man schreibt dann die Komponenten eines Tensors $T \in V^{(r,s)}$ mit r oberen Indizes und s unteren Indizes (mit Summenkonvention):

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_s}$$

Die Komponenten berechnen sich wie folgt (Übung):

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$$

Ist $\{\tilde{e}_i\}$ eine weitere Basis von V mit $\tilde{e}_i = A_i^j e_j$, so sind die Komponenten von T bzgl. $\{\tilde{e}_i\}$ und der dazu dualen Basis $\{\tilde{\theta}^i\}$ gegeben durch (Übung):

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} (A^{-1})_{k_1}^{i_1} \dots (A^{-1})_{k_r}^{i_r} A_{j_1}^{l_1} \dots A_{j_s}^{l_s}$$

Beispiel 3.3.2. (a) Die Komponenten eines Vektors $v \in V$ schreiben wir als v^i .

(b) Die Komponenten einer Linearform $\eta \in V^*$ schreiben wir als η_i .

(c) Die Komponenten einer linearen Abbildung $f: V \rightarrow V$, also von $f \in V^* \otimes V \equiv V \otimes V^*$, schreiben wir als f_j^i . Es gilt also $f = f_j^i e_i \otimes \theta^j$.

Lemma 3.3.3. In Komponenten gilt:

(a) Für Tensorprodukte: $(S \otimes T)_{j_1 \dots j_s l_1 \dots l_u}^{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_t} = S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} T_{l_1 \dots l_u}^{k_1 \dots k_t}$ für $S \in V^{(r,s)}$, $T \in V^{(t,u)}$, wobei wir $V^{(r,s)} \otimes V^{(t,u)} \equiv V^{(r+t,s+u)}$ identifiziert haben

(b) Für die Anwendung von Tensoren (als multilineare Abbildungen) auf Linearformen und Vektoren: $T(\eta, v) = T_j^i \eta_i v^j$ für $T \in V^{(1,1)}$, $\eta \in V^*$, $v \in V$ (analog für Tensoren höheren Typs)

(c) Ist $T \in V^{(r,s)}$, so erhält man die Komponenten der Kontraktion $C_{t,u}$, indem man bei den Komponenten von T den t -ten oberen Index mit dem u -ten unteren Index gleichsetzt und über diesen Index summiert, genannt „Kontraktion der Indizes“.

Für $T \in V^{(3,3)}$ ist beispielsweise

$$(C_{1,2} T)_{kl}^{ij} = T_{kml}^{mij}$$

Beweis. Übung. □

Beispiel 3.3.4. Ist $f \in \text{Hom}(V, V) \equiv V^{(1,1)}$ eine lineare Abbildung, so ist $C_{1,1} f = f_i^i = \text{tr}(f)$ die Spur von f .

4. Ein analytischer Trick: Hutfunktionen und Zerlegungen der Eins

I could be bounded in a nutshell, and count myself a king of infinite space [...].

HAMLET

The Tragical History of Hamlet, Prince of Denmark, Akt II,

Szene ii

(WILLIAM SHAKESPEARE)

Von recht großer Bedeutung in der (glatten) Differentialgeometrie sind sogenannte *Hutfunktionen*¹, glatte Funktionen, die auf einer gegebenen abgeschlossenen Menge A konstant 1 sind, außerhalb einer größeren offenen Menge $U \supset A$ allerdings 0. Sie ermöglichen, Eigenschaften oder geometrische Objekte zu „lokalisieren“.

Verwandt und ebenso wichtig sind *Zerlegungen der Eins*, Familien von jeweils in den Mengen einer gegebenen offenen Überdeckung getragenen Funktionen, deren Summe die konstante Einsfunktion ergibt. Diese kann man benutzen, um lokale Konstruktionen zu globalen „zusammenzustückeln“.

Wir wollen jetzt die Existenz von Hutfunktionen und Zerlegungen der Eins zeigen. Dabei orientieren wir uns stark am entsprechenden Abschnitt im Buch von Lee.

4.1. Abschneidefunktionen auf \mathbb{R} und Hutfunktionen im \mathbb{R}^n

Als erstes brauchen wir die Existenz einer glatten Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf der negativen reellen Achse konstant 0, auf der positiven aber positiv ist:

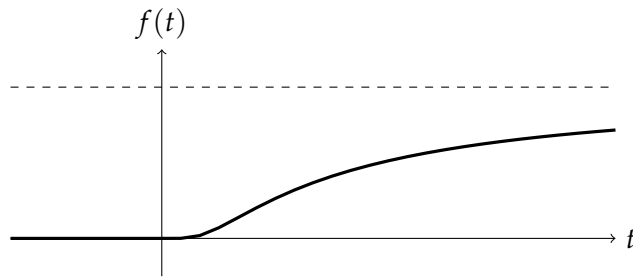
Proposition 4.1.1. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) := \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-1/t} & t > 0 \end{cases}$$

ist glatt.

¹Das ist kein Standard-Name. Auf Englisch werden diese Funktionen meist *bump functions* genannt, eine gute deutsche Entsprechung gibt es nicht wirklich.

4. Ein analytischer Trick: Hutfunktionen und Zerlegungen der Eins



Beweis. Auf $(-\infty, 0)$ ist f konstant 0, also auch alle Ableitungen; auf $(0, \infty)$ ist f als Verkettung glatter Funktionen glatt. Interessant ist also die Frage, ob alle Ableitungen am Punkt 0 existieren.

Damit wir dies untersuchen können, betrachten wir zunächst die k -ten Ableitungen $f^{(k)}(t)$ für $t > 0$. Per Induktion kann man leicht zeigen (Übung!), dass diese von der Form

$$f^{(k)}(t) = p_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k}} \text{ für } t > 0$$

sind, wobei p_k ein Polynom ist.

Wir wollen jetzt per Induktion zeigen, dass $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \geq 0$. Für $k = 0$ stimmt das nach Definition. Nehmen wir an, es sei $f^{(k)}(0) = 0$, und betrachten wir $f^{(k+1)}(0)$. Nach Definition und Induktionsannahme ist

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(h) - f^{(k)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(h)}{h}.$$

Der linksseitige Limes ist klarerweise 0, der rechtsseitige ist

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} p_k(h) \frac{e^{-1/h}}{h^{2k+1}}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h^{2k+1}} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^{-2k-1}}{e^{1/h}} \\ \text{(l'H\^opital)} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(-2k-1)h^{-2k-2}}{-h^{-2}e^{1/h}} \\ &= (2k+1) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h^{2k}} \\ \text{(induktiv)} &= \dots = (2k+1)! \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{-1/h} \\ &= 0, \end{aligned}$$

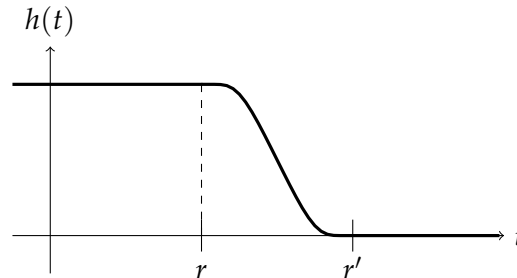
also ist

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} p_k(h) \frac{e^{-1/h}}{h^{2k+1}} = p_k(0) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h^{2k+1}} = 0.$$

Damit existiert $f^{(k+1)}(0)$ und ist 0. □

Damit können wir nun sogenannte *Abschneidefunktionen* konstruieren:

Lemma 4.1.2 (Existenz von Abschneidefunktionen). Für beliebige reelle Zahlen $r' > r > 0$ gibt es eine glatte Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = 1$ für $t \leq r$, $h(t) \in (0,1)$ für $t \in (r, r')$ und $h(t) = 0$ für $t \geq r'$.



Beweis. Sei f die Funktion aus der vorigen Proposition. Wir setzen

$$h(t) := \frac{f(r' - t)}{f(r' - t) + f(t - r)}.$$

Der Nenner ist immer positiv: Für $t \leq r < r'$ ist $r' - t > 0$, also $f(r' - t) > 0$, und für $t > r$ ist $t - r > 0$, also $f(t - r) > 0$.

Da f glatt ist, ist auch h glatt. Für $t \leq r$ ist $f(t - r) = 0$, also $h(t) = 1$; für $t \in (r, r')$ ist sowohl $f(r' - t) > 0$ als auch $f(t - r) > 0$, also $h(t) \in (0,1)$; und für $t \geq r'$ ist $f(r' - t) = 0$, also $h(t) = 0$. \square

Mit Abschneidefunktionen können wir nun *Hutfunktionen* auf dem \mathbb{R}^n konstruieren, die Werte in $[0,1]$ annehmen und auf einer gegebenen Kugel konstant 1 sind, außerhalb einer größeren (konzentrischen) aber 0.

Lemma 4.1.3. Für beliebige reelle Zahlen $r' > r > 0$ gibt es eine glatte Funktion $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Werten in $[0,1]$, die $H \equiv 1$ auf $\bar{B}_r(0)$ und $H \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{r'}(0)$ erfüllt und auf $B_{r'}$ positiv ist.

Beweis. Wir setzen $H(a) := h(\|a\|)$, wobei h die Abschneidefunktion aus dem vorigen Lemma ist. Die Aussagen über Werte von H gelten nach Konstruktion. Auf $\mathbb{R}^n \setminus 0$ ist die Norm $\|\cdot\|$ glatt, also auch H als Verkettung von glatten Funktionen; da H auf $B_r(0)$ konstant 1 ist, ist es auch in 0 glatt. \square

4.2. Zerlegungen der Eins

Zunächst brauchen wir ein paar Definitionen.

Definition 4.2.1. Sei M ein topologischer Raum.

4. Ein analytischer Trick: Hutfunktionen und Zerlegungen der Eins

- (a) Der Träger einer Funktion $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\text{supp}(\psi) := \overline{\{p \in M: \psi(p) \neq 0\}}$. (Diese Definition ergibt auch Sinn, wenn der Zielbereich von ψ ein Vektorraum oder ein Vektorbündel [oder eine abelsche Gruppe, ...] ist.)
- (b) Eine Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen von M heißt *lokal endlich*, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U gibt, die nur endlich viele der X_i schneidet.

Das, worum es hier gehen soll, sind nun Zerlegungen der Eins:

Definition 4.2.2. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Eine $\{U_i\}_{i \in I}$ untergeordnete Zerlegung der Eins ist eine Familie $\{\psi_i\}_{i \in I}$ von glatten Funktionen $\psi_i \in C^\infty(M)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Die ψ_i nehmen Werte in $[0, 1]$ an.
- (ii) Für jedes $i \in I$ ist $\text{supp}(\psi_i) \subset U_i$.
- (iii) $\{\text{supp}(\psi_i)\}_{i \in I}$ ist lokal endlich.
- (iv) Für alle $p \in M$ ist $\sum_{i \in I} \psi_i(p) = 1$.

Wegen der lokalen Endlichkeit sind in einer Umgebung jedes beliebigen Punktes nur endlich viele der Summanden in (iv) ungleich 0, die Summe existiert also (ohne dass wir uns Gedanken um Konvergenz machen müssen).

Satz 4.2.3. Zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

Grobe Beweisidee. Wir überdecken die gegebenen offenen Mengen U_i mit kleinen Kartenumgebungen, deren Bilder Kugeln im \mathbb{R}^n sind, und stückeln die ψ_i aus Hutfunktionen auf diesen Kugeln zusammen. Details sind uns hier zu technisch; bei Interesse finden sie sich in Anhang A. □

4.3. Hutfunktionen auf Mannigfaltigkeiten

Jetzt können wir Hutfunktionen konstruieren:

Korollar 4.3.1 (Hutfunktionen). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, A eine abgeschlossene und $U \supset A$ eine offene Teilmenge von M . Dann gibt es eine Hutfunktion ψ mit $\psi \equiv 1$ auf A und Träger in U , also eine glatte Funktion $\psi \in C^\infty(M)$ mit Werten in $[0, 1]$ mit $\psi \equiv 1$ auf A und $\text{supp}(\psi) \subset U$.

Beweis. Setze $U_0 := U$ und $U_1 := M \setminus A$. Sei $\{\psi_0, \psi_1\}$ eine der offenen Überdeckung $\{U_0, U_1\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Da $\text{supp} \psi_1 \subset U_1$ gilt, verschwindet ψ_1 auf A ; dort gilt also $1 = \psi_0 + \psi_1 = \psi_0$. Außerdem ist $\text{supp}(\psi_0) \subset U$, also ist ψ_0 eine Funktion mit den gesuchten Eigenschaften. □

Mit Hutfunktionen können wir lokal definierte Funktionen zu globalen Funktionen fortsetzen:

Korollar 4.3.2. Seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $V \subset U \subset M$ offene Teilmengen mit $\bar{V} \subset U$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ eine glatte Funktion. Dann gibt es eine globale Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M)$, die auf V mit f übereinstimmt.

Beweis. Wir wählen eine Hutfunktion $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit Träger in U und $\psi \equiv 1$ auf \bar{V} und definieren

$$\tilde{f} := \begin{cases} f \cdot \psi & \text{auf } U \\ 0 & \text{auf } M \setminus \text{supp}(\psi). \end{cases}$$

□

Haben wir einen Tangentialvektor $v \in T_p M$, also eine Derivation von Funktionskeimen $\mathcal{C}_p^\infty(M)$, so lässt sich dieser natürlich insbesondere auf globale Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ anwenden. Als Anwendung von Hutfunktionen wollen wir zeigen, dass sich auch umgekehrt „punktweise Derivationen“ von $\mathcal{C}^\infty(M)$ zu Derivationen von Funktionskeimen „lokalisieren“ lassen:

Lemma 4.3.3 (Tangentialvektoren als punktweise Derivationen). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei v eine Derivation von $\mathcal{C}^\infty(M)$ bzgl. p , d. h. eine lineare Abbildung $v: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$v(gh) = v(g)h(p) + g(p)v(h)$$

für alle $g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dann gibt es einen eindeutigen Tangentialvektor $w \in T_p M$ mit $w([g]) = v(g)$ für alle globalen Funktionen $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz von w . Sei $[f] \in \mathcal{C}_p^\infty(M)$ ein Funktionskeim, repräsentiert durch $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Wir definieren $w([f])$ wie folgt: Wir wählen eine beliebige globale Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M)$, die in einer offenen Umgebung $V \subset U$ mit f übereinstimmt, und setzen $w([f]) := v(\tilde{f})$. (Für den Fall, dass schon $U = M$ gilt, können wir einfach $\tilde{f} = f$ wählen und haben damit direkt die geforderte Gleichung $w([f]) = v(f)$ für globale Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.)

Wir müssen natürlich zeigen, dass w von der Wahl der „Fortsetzung“ \tilde{f} unabhängig ist. D. h. wir müssen zeigen: Stimmen $g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ in einer offenen Umgebung V von p überein, so ist $v(g) = v(h)$. Um das zu sehen, wähle eine Hutfunktion $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit Träger in $M \setminus \{p\}$ und $\psi \equiv 1$ auf $\text{supp}\{g - h\}$. Da dann $g - h = (g - h)\psi$ gilt, ist

$$v(g - h) = v((g - h)\psi) = v(g - h) \underbrace{\psi(p)}_{=0} + \underbrace{(g - h)(p)}_{=0} v(\psi) = 0.$$

Dies zeigt auch, dass $w([f])$ von der Wahl des Repräsentanten f unabhängig ist.

Die Eindeutigkeit von w ist nun auch klar: Haben wir ein $\hat{w} \in T_p M$, das $\hat{w}([g]) = v(g)$ für alle globalen Funktionen g erfüllt, so ist $\hat{w}([f]) = \hat{w}([\tilde{f}]) = v(\tilde{f}) = w([\tilde{f}]) = w([f])$. □

4. Ein analytischer Trick: Hutfunktionen und Zerlegungen der Eins

Bemerkung 4.3.4. Da eine analytische Funktion, die auf einer offenen Menge verschwindet, überall verschwindet, gibt es keine analytischen Hutfunktionen. Auf analytischen Mannigfaltigkeiten funktioniert daher der vorherige Beweis nicht, und tatsächlich sind auf einer analytischen Mannigfaltigkeit M im Allgemeinen „punktweise Derivationen“ von $C^\omega(M)$ nicht dasselbe wie Derivationen von analytischen Funktionskeimen $C_p^\omega(M)$.

5. Vektorbündel

A single twig breaks, but the bundle of twigs is strong.

TECUMSEH

5.1. Faserbündel

Definition 5.1.1 (Faserbündel). Ein *Faserbündel* (P, M, π, F) ist ein Tupel aus drei Mannigfaltigkeiten (dem *Totalraum* P , der *Basis* M und der *typischen Faser* F) zusammen mit einer *Projektion* $\pi: P \rightarrow M$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Für alle Punkte $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $x \in U \subset M$ und ein Diffeomorphismus $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, sodass das folgende Diagramm kommutiert, also $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = \text{pr}_1 \circ \phi$ (wobei pr_1 die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet):

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\
 \pi \downarrow & \swarrow \text{pr}_1 & \\
 U & &
 \end{array}$$

Eine solche Abbildung ϕ heißt *lokale Trivialisierung*. Aufgrund der Existenz lokaler Trivialisierungen ist das Urbild jedes Punktes $x \in M$ unter der Projektion (*Faser* von x genannt) $P_x := \pi^{-1}(\{x\})$ diffeomorph zur typischen Faser: $P_x \cong F \forall x \in M$.

Eine Familie lokaler Trivialisierungen, die P überdecken, heißt *Bündelatlas*.

Beachte, dass aus dem obigen Diagramm bereits folgt, dass π eine surjektive Submersion ist (da ϕ ein Diffeomorphismus und pr_1 eine Submersion ist).

Notation 5.1.2. Man sagt auch „Faserbündel (P, π) über M “.

Lemma 5.1.3. Sei eine bijektive Abbildung $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ auf einem Faserbündel (P, π, M, F) mit den obigen Eigenschaften gegeben. Da Verkettungen von Diffeomorphismen wieder Diffeomorphismen sind, ist ϕ genau dann ein Diffeomorphismus (und damit eine lokale Trivialisierung), wenn für alle Karten $\varphi: V_y \rightarrow \varphi(V_y) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ um $y \in U \subset M$ und $\psi: W_v \rightarrow \psi(W_v) \subset \mathbb{R}^{\dim F}$ um $v \in F$ die folgende Verkettung ein Diffeomorphismus (und damit nach Lemma 1.3.4 eine Karte von P) ist :

$$(\varphi \times \psi) \circ \phi|_{\phi^{-1}(V_y \times W_v)} : \underbrace{\phi^{-1}(V_y \times W_v)}_{\subset P} \rightarrow \varphi(V_y) \times \psi(W_v) \subset \mathbb{R}^{\dim M + \dim F}$$

5. Vektorbündel

Sei von nun an (P, M, π, F) ein Faserbündel.

Beispiel 5.1.4.

- (a) Das triviale Bündel mit typischer Faser F und Basis M ist das kartesische Produkt $M \times F$ (genauer gesagt das Bündel $(M \times F, \text{pr}_1)$).
- (b) Für eine offene Menge $U \subset M$ und $P|_U := \pi^{-1}(U)$ ist $(P|_U, U, \pi|_{P|_U}, F)$ ein Faserbündel.

Definition 5.1.5 (Schnitt). Eine (glatte) Abbildung $\sigma: M \rightarrow P$ heißt (globaler) *Schnitt*, wenn $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$, also $\sigma(x) \in P_x \forall x \in M$. Analog heißt für eine offene Menge $U \subset M$ eine Abbildung $\sigma: U \rightarrow P|_U$ *lokaler Schnitt*, wenn $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$.

Die Menge aller globalen Schnitte wird mit $\Gamma(P)$ bezeichnet, die der lokalen Schnitte mit $\Gamma(P|_U)$.

5.2. Vektorbündel

Definition 5.2.1 (Vektorbündel). Ein Faserbündel $(E, M, \pi, \mathbb{R}^n)$ heißt *Vektorbündel vom Rang n* , wenn E_x für alle Punkte $x \in M$ ein n -dimensionaler Vektorraum ist. Weiter soll es einen Bündelatlas aus lokalen Trivialisierungen $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ geben, sodass die folgende Abbildung für jeden Punkt $x \in U$ ein Vektorraumisomorphismus ist:

$$E_x \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto \text{pr}_2(\phi(p))$$

Daraus folgt, dass die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow E_x, v \mapsto \phi^{-1}(x, v)$ ebenfalls ein Vektorraumisomorphismus ist.

Im Kontext von Vektorbündeln „gelten“ nur noch solche Trivialisierungen, die punktweise Isomorphismen sind.

Analog zu Kartenwechseln lassen sich auch *Trivialisierungswechsel* definieren:

Definition 5.2.2. Sei $(E, M, \pi, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorbündel, $U, V \subset M$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ und Trivialisierungen $\phi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, \phi_V: \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$.

Die folgende Abbildung heißt *Trivialisierungswechsel*:

$$\phi_V \circ \phi_U^{-1}: (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n, (q, v) \mapsto (q, \tau(q)v)$$

wobei die Einschränkung unterdrückt wurde. Die Abbildung $\tau: U \cap V \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ist glatt und wird als *Übergangsfunktion* bezeichnet.

Beispiel 5.2.3.

- (a) Das triviale Bündel $M \times \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorbündel vom Rang n .

- (b) Das Tangentialbündel $TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$ ist ein Vektorbündel vom Rang $n := \dim M$: mithilfe von Karten von M kann man auf kanonische Weise einen Bündelatlantlas und Karten von TM konstruieren (Übung).

Beachte jedoch, dass im Allgemeinen $TM \not\cong M \times \mathbb{R}^n$ (es existiert also nicht unbedingt ein Vektorbündelisomorphismus zwischen dem Tangential- und dem trivialen Bündel). Im Fall $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$ heißt die Mannigfaltigkeit parallelisierbar.

- (c) Wir definieren auf der reellen Ebene \mathbb{R}^2 die Äquivalenzrelation

$$(x, y) \sim (x', y') : \iff \exists n \in \mathbb{Z} : (x', y') = (x + n, (-1)^n y)$$

und definieren das *Möbiusbündel* als den Quotienten

$$\text{Mb} = \mathbb{R}^2 / \sim.$$

Man beachte, dass für jeden Punkt in \mathbb{R}^2 eine offene Umgebung existiert, sodass die Projektion auf das Möbiusbündel eine injektive, stetige Abbildung ist. Durch Einschränkung auf das Bild und Inversion erhält man Karten (und einen Atlas).

Das Möbiusbündel ist ein Vektorbündel vom Rang 1 über dem Kreis $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Die Projektion ist dabei gegeben durch $\pi([x, y]) := [x]$ mit den Fasern

$$\pi^{-1}(\{[a]\}) = \{[x, y] \mid (x, y) \in \{a\} \times \mathbb{R}\} \cong \{a\} \times \mathbb{R}.$$

Trivialisierungen dieses Vektorbündels kann man wie folgt konstruieren: Betrachte ein Intervall $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $0 < b - a < 1$ und bezeichne $[I]$ das Intervall als Teilmenge von S^1 . Dann ist $\Phi: \pi^{-1}([I]) \rightarrow [I] \times \mathbb{R}$ mit $\Phi^{-1}([x], y) = [\tilde{x}, y]$ eine lokale Trivialisierung, wobei \tilde{x} den Repräsentanten von $[x] \in [I]$ bezeichnet, der in I liegt.

Definition 5.2.4 (Vektorbündelhomomorphismen).

Seien $(E_a, M_a, \pi_a, \mathbb{R}^{n_a}), (E_b, M_b, \pi_b, \mathbb{R}^{n_b})$ Vektorbündel.

Ein Tupel (F, f) mit $F: E_a \rightarrow E_b$ und $f: M_a \rightarrow M_b$ heißt *Vektorbündelhomomorphismus*, wenn $\pi_b \circ F = f \circ \pi_a$ gilt und $F|_{(E_a)_x}: (E_a)_x \rightarrow (E_b)_{f(x)}$ eine lineare Abbildung ist.

Es kommutiert also insbesondere das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E_a & \xrightarrow{F} & E_b \\ \pi_a \downarrow & & \downarrow \pi_b \\ M_a & \xrightarrow{f} & M_b \end{array}$$

5. Vektorbündel

Beispiel 5.2.5. Ist $f \in C^\infty(M, N)$, dann können wir das Differential als eine Abbildung $Df: TM \rightarrow TN$ auffassen: Wir setzen

$$Df(v) := Df|_{\pi(v)}(v) \quad \text{für } v \in TM,$$

wobei $\pi: TM \rightarrow M$ die Projektion ist.

Nach Konstruktion des Tangentialbündels ist Df glatt. (Df, f) ist ein Vektorbündelhomomorphismus $TM \rightarrow TN$.

Kommen wir nun zu Schnitten von Vektorbündeln. Diese haben durch die zusätzliche Struktur der Fasern auch einige neue Eigenschaften.

Bemerkung 5.2.6. Man kann Schnitte von Vektorbündeln in offensichtlicher Weise mit Funktionen multiplizieren: Für $f \in C^\infty(M), \sigma \in \Gamma(E)$ definiert man $f\sigma \in \Gamma(E)$ durch $(f\sigma)(x) := f(x)\sigma(x)$. Mit dieser Operation wird $\Gamma(E)$ zu einem $C^\infty(M)$ -Modul.

Definition 5.2.7 (Rahmen). Ein *lokaler Rahmen* über U ist ein Tupel lokaler Schnitte $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Gamma(E|_U)$, das für alle Punkte $x \in U$ eine Basis von E_x bildet.

Natürlicherweise ist ein *globaler Rahmen* ein lokaler Rahmen über M .

Beachte: Ist (ϕ, U) eine Trivialisierung und (e_1, \dots, e_n) die Standardbasis von \mathbb{R}^n , dann ist mit $\sigma_i(x) := \phi^{-1}(x, e_i)$ das Tupel $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ein lokaler Rahmen über U .

Umgekehrt können wir auch aus lokalen Rahmen lokale Trivialisierungen gewinnen:

Satz 5.2.8. Sei $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Gamma(P|_U)$ ein lokaler Rahmen. Dann existiert eine lokale Trivialisierung $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, sodass $\sigma_i(x) = \phi^{-1}(x, e_i)$.

Beweis. Die inverse Abbildung zur gesuchten Trivialisierung ist

$$\Psi: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U), \quad (x, (v^1, \dots, v^n)) \mapsto v^i \sigma_i(x).$$

Da der Rahmen per Definition punktweise eine Basis der Fasern bildet, ist die Abbildung faserweise ein Isomorphismus und damit bijektiv. Es gilt also zu zeigen, dass Ψ ein (lokaler) Diffeomorphismus ist.

Sei $x_0 \in U$ und $\Phi: \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ eine Trivialisierung mit $x_0 \in V \subset U$. Wir schreiben nun für die Verkettung $\Phi \circ \sigma_i|_V(x) = (x, (\sigma_i^1(x), \dots, \sigma_i^n(x)))$ mit glatten Funktionen $\sigma_i^j: V \rightarrow \mathbb{R}$. Daraus sieht man direkt, dass

$$(\Phi \circ \Psi|_{V \times \mathbb{R}^n})(x, (v^1, \dots, v^n)) = (x, (v^i \sigma_i^1(x), \dots, v^i \sigma_i^n(x)))$$

glatt ist.

Beachte, dass diese Abbildung nach obiger Anmerkung und der Definition von Trivialisierungen auf den Fasern wieder ein Isomorphismus ist und die Darstellungsmatrix $\sigma_i^j(x)$ besitzt. Diese ist also invertierbar, wobei das (punktweise) Inverse mit $\tau_i^j(x)$ bezeichnet wird. Da sich die Inverse allerdings durch die Adjunkte (also durch

Berechnung von Determinanten) schreiben lässt, ist die Inversion ein glatter Diffeomorphismus $GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, und damit ist auch

$$(\Phi \circ \Psi|_{V \times \mathbb{R}^n})^{-1}(x, (w^1, \dots, w^n)) = (x, (w^i \tau_i^1(x), \dots, w^i \tau_i^n(x)))$$

glatt. $\Psi|_{V \times \mathbb{R}^n}$ ist dementsprechend glatt, da Φ ein glatter Diffeomorphismus ist und damit ist dann auch Ψ ein Diffeomorphismus, da x_0 beliebig war. \square

Korollar 5.2.9. Ein Vektorbündel besitzt genau dann einen globalen Rahmen, wenn es trivial ist (das heißt isomorph zum trivialen Bündel).

Beweis. Übung. \square

Nach Konstruktion gilt folgende Charakterisierung der Glattheit:

Lemma 5.2.10. Ein lokaler Schnitt $\sigma: U \rightarrow E$ ist genau dann glatt, wenn für einen einen lokalen Rahmen $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ mit $\sigma = f^i \sigma_i$ die Koeffizientenfunktionen $f^i: U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt sind.

Beweis. Übung. \square

5.3. Konstruktionen von Vektorbündeln

Definition 5.3.1. Das zu $(E, M, \pi, \mathbb{R}^n)$ duale Bündel $(E^*, M, \pi', (\mathbb{R}^n)^*)$ ist wie folgt gegeben: Wir setzen

$$\begin{aligned} E^* &:= \bigcup_{x \in M} (E_x)^* \\ \pi' &: E^* \rightarrow M \\ (\pi')^{-1}(x) &= E_x^* = (E_x)^* \quad \forall x \in M, \end{aligned}$$

und für eine Trivialisierung (ϕ, U) von E ist die folgende Abbildung eine Trivialisierung des dualen Bündels:

$$\begin{aligned} \phi' &: (\pi')^{-1}(U) \rightarrow U \times (\mathbb{R}^n)^* \\ \lambda &\mapsto \left(x, \lambda \circ (\text{pr}_2 \circ \phi|_{\pi^{-1}(\{x\})})^{-1} \right), \end{aligned}$$

wobei $\lambda \in E_x^*$. Übergangsfunktionen sind (unter Identifikation von \mathbb{R}^n mit Spalten- und $(\mathbb{R}^n)^*$ mit Zeilenvektoren) durch $\tau' = \tau^{-1}$ gegeben, sodass $(x, \lambda) \mapsto (x, \lambda \tau'(x))$.

Bei dieser und den Folgenden Konstruktionen erhält man einen Atlas des Vektorbündels durch solche Karten, wie sie nach Lemma 5.1.3 durch die Trivialisierungen mittels Verkettung mit Karten des Basisraumes gegeben sind. Man konstruiert die differenzierbare Struktur des Vektorbündels (die Vervollständigung des obigen Atlanten) also gerade so, dass die angegebenen lokalen Trivialisierungen Diffeomorphismen sind.

5. Vektorbündel

Lemma 5.3.2. Sei $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ein lokaler Rahmen von E . Definieren wir lokale Schnitte $\theta^1, \dots, \theta^n$ von E^* dadurch, dass punktweise $\{\theta^i(x)\}$ die duale Basis von $(E_x)^*$ zur Basis $\{\sigma_i(x)\}$ von E_x ist, dann sind die θ^i glatt, und somit ist $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ ein lokaler Rahmen von E^* .

Beweis. Übung. □

Satz 5.3.3 (Dualität von Schnitten). Man erhält durch die Konstruktion des dualen Bündels eine $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilineare Abbildung

$$\Gamma(E) \times \Gamma(E^*) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \quad (\sigma, \rho) \mapsto \sigma(\rho) = \rho(\sigma),$$

punktweise definiert als

$$(\sigma(\rho))(x) = (\rho(\sigma))(x) := \underbrace{\rho(x)}_{\in E_x^*} \underbrace{(\sigma(x))}_{\in E_x} \in \mathbb{R}.$$

Jeder Schnitt $\rho \in \Gamma(E^*)$ des dualen Bündels kann darüber also aufgefasst werden als $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare Abbildung $\Gamma(E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$.

Umgekehrt ist auch jede $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare Abbildung $\Gamma(E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ gegeben durch Anwendung eines eindeutig bestimmten Schnitts $\rho \in \Gamma(E^*)$.

Es gilt also in natürlicher Weise $\Gamma(E^*) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Gamma(E), \mathcal{C}^\infty(M))$.

Man beachte, dass die „Anwendung der Schnitte auf die Schnitte des dualen Bündels“ punktweise den Homomorphismus aus Lemma 0.2.11 verwendet, der in der Notation unterdrückt wurde.

Beweis. Die $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Bilinearität von $(\sigma, \rho) \mapsto \rho(\sigma)$ ist aufgrund der punktweisen Definition klar.

Haben wir eine $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare Abbildung $F: \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ gegeben, so wollen wir daraus einen Schnitt ρ von E^* konstruieren mit $F(\sigma) = \rho(\sigma)$ für alle $\sigma \in \Gamma(E)$, und wir wollen sehen, dass dieser Schnitt eindeutig ist.

Punktweise definiert man also $\rho: M \rightarrow E^*$ implizit durch $(\rho(x))(\sigma(x)) = (F(\sigma))(x)$. Damit dies $\rho(x)$ eindeutig definiert, zeigen wir, dass wir aus der Abbildung F auch alle Werte $(\rho(x))(s) \quad \forall s \in E_x$ bestimmen können.

Wir müssen also zeigen, dass sich einerseits jedes $s \in E_x$ zu einem Schnitt $\sigma \in \Gamma(E)$ fortsetzen lässt mit $\sigma(x) = s$ und dass dann andererseits $(\rho(x))(\sigma(x))$ von der Wahl dieser Fortsetzung unabhängig ist. Beides geht mit Hutfunktionen, ähnlich zum Beweis von Lemma 4.3.3 (Übung).

Die Glattheit von ρ folgt dann durch Anwendung auf einen lokalen Rahmen mit Lemma 5.2.10. □

Beispiel 5.3.4. Mit obiger Konstruktion können wir aus dem Tangentialbündel TM das Kotangentialbündel T^*M gewinnen. Wie wir später sehen werden, ergeben sich in Kombination mit den folgenden Konstruktionen viele neue Strukturen.

Seien nun $(E_a, M, \pi_a, \mathbb{R}^{n_a}), (E_b, M, \pi_b, \mathbb{R}^{n_b})$ Vektorbündel.

Definition 5.3.5 (Whitney-Summe). Die *Whitney-Summe* $(E_a \oplus E_b, M, \pi, \mathbb{R}^{n_a+n_b})$ ist ein wie folgt gegebenes Vektorbündel:

$$\begin{aligned} E_a \oplus E_b &:= \bigcup_{x \in M} E_{a,x} \oplus E_{b,x} \\ \pi: E_a \oplus E_b &\rightarrow M \\ (\pi)^{-1}(x) &= (E_a \oplus E_b)_x = E_{a,x} \oplus E_{b,x} \quad \forall x \in M, \end{aligned}$$

und für Trivialisierungen $(\phi_a, U), (\phi_b, U)$ ist die folgende Abbildung eine Trivialisierung der Whitney-Summe:

$$\begin{aligned} \phi: \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R}^{n_a+n_b} \\ v_a \oplus v_b &\mapsto (\pi_a(v_a), \text{pr}_2(\phi_a(v_a)) \oplus \text{pr}_2(\phi_b(v_b))) \end{aligned}$$

Übergangsfunktionen solcher Trivialisierungen sind (wieder unter Verwendung von Spaltenvektoren) durch die folgende Blockdiagonalmatrix gegeben:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_a & 0 \\ 0 & \tau_b \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Definition 5.3.6 (Tensorprodukt). Das *Tensorprodukt* $(E_a \otimes E_b, M, \pi, \mathbb{R}^{n_a \cdot n_b})$ ist das wie folgt gegebene Vektorbündel: Wir setzen

$$\begin{aligned} E_a \otimes E_b &:= \bigcup_{x \in M} E_{a,x} \otimes E_{b,x} \\ \pi: E_a \otimes E_b &\rightarrow M \\ (\pi)^{-1}(x) &= (E_a \otimes E_b)_x = E_{a,x} \otimes E_{b,x} \quad \forall x \in M, \end{aligned}$$

und für Trivialisierungen $(\phi_a, U), (\phi_b, U)$ ist die folgende Abbildung eine Trivialisierung des Tensorproduktes:

$$\begin{aligned} \phi_a \otimes \phi_b: \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R}^{n_a \cdot n_b} \\ v_a \otimes v_b &\mapsto (\pi_a(v_a), \text{pr}_2(\phi_a(v_a)) \otimes \text{pr}_2(\phi_b(v_b))) \end{aligned}$$

mit der kanonischen Identifikation $\mathbb{R}^{n_a} \otimes \mathbb{R}^{n_b} \cong \mathbb{R}^{n_a \cdot n_b}$. Die Übergangsfunktionen des Tensorproduktes sind durch das Tensorprodukt der Übergangsfunktionen gegeben: $\tau = \tau_a \otimes \tau_b$.

Lemma 5.3.7 (Schnitte von Tensorprodukt und Whitney-Summe). Für Schnitte $\sigma_a \in \Gamma(E_a), \sigma_b \in \Gamma(E_b)$ erhält man Schnitte der Whitney-Summe und des Tensorproduktes durch „faserweise“ Verknüpfung:

$$\begin{aligned} \Gamma(E_a) \times \Gamma(E_b) &\rightarrow \Gamma(E_a \oplus E_b), \\ (\sigma_a, \sigma_b) &\mapsto \sigma_a \oplus \sigma_b, \quad (\sigma_a \oplus \sigma_b)(p) := \sigma_a(p) \oplus \sigma_b(p) \\ \Gamma(E_a) \times \Gamma(E_b) &\rightarrow \Gamma(E_a \otimes E_b), \\ (\sigma_a, \sigma_b) &\mapsto \sigma_a \otimes \sigma_b, \quad (\sigma_a \otimes \sigma_b)(p) := \sigma_a(p) \otimes \sigma_b(p) \end{aligned}$$

5. Vektorbündel

Definition 5.3.8 (Rückzug von Vektorbündeln). Sei $f: N \rightarrow M$.

Das entlang f zurückgezogene Vektorbündel (f^*E, π_f, N, F) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} f^*E &:= \bigcup_{x \in N} E_{f(x)} \\ \pi_f: f^*E &\rightarrow N \\ (\pi_f)^{-1}(x) &= (f^*E)_x = E_{f(x)} \quad \forall x \in N \end{aligned}$$

Für $x \in N$ existiert eine Trivialisierung (ϕ, U) um $f(x) \in M$, und dann definieren wir die folgende Abbildung als eine Trivialisierung $(\phi_f, f^{-1}(U))$ des zurückgezogenen Bündels um $x \in N$:

$$\begin{aligned} \phi_f: (\pi_f)^{-1}(f^{-1}(U)) &\rightarrow f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^n \\ \underbrace{v}_{\in (f^*(E))_x = E_{f(x)}} &\mapsto (\pi_f(v), \text{pr}_2(\phi(v))) \end{aligned}$$

Die Übergangsfunktionen sind identisch zu denen des ursprünglichen Bündels.

Mit dem Rückzug eines Vektorbündels geht auch ein Rückzug seiner Schnitte einher.

Definition 5.3.9 (Rückzug von Schnitten). Sei $f: N \rightarrow M, \sigma \in \Gamma(E)$.

Der Rückzug eines Schnittes $f^*\sigma$ ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} f^*\sigma: N &\rightarrow f^*E, \\ x &\mapsto \sigma(f(x)) =: (f^*\sigma)(x) \end{aligned}$$

Damit ist $f^*\sigma \in \Gamma(f^*E)$, insbesondere differenzierbar. Wir bezeichnen die Menge der zurückgezogenen Schnitte mit $f^*(\Gamma(E)) \subset \Gamma(f^*E)$.

Lemma 5.3.10. Sei $f: N \rightarrow M$.

Die zurückgezogenen Schnitte $f^*(\Gamma(E))$ erzeugen durch $\mathcal{C}^\infty(N)$ -Linearkombination die Schnitte des zurückgezogenen Bündels $\Gamma(f^*E)$.

Beweis. Übung. Hinweis: Betrachte lokale Rahmen. □

6. Vektorfelder

The space in which these forces act may therefore be considered as a magnetic field, and we may study it in the same way as we have already studied the field in the neighbourhood of ordinary magnets, by tracing the course of the lines of magnetic force, and measuring the intensity of the force at every point.

JAMES CLERK MAXWELL
A Treatise on Electricity and Magnetism (1873)

6.1. Grundlagen

Definition 6.1.1. Ein (glattes) *Vektorfeld* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist ein (glatter) Schnitt des Tangentialbündels TM , also eine (glatte) Abbildung $X: M \rightarrow TM$, sodass $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$ gilt. Statt $X(p)$ schreiben wir im Folgenden meist X_p .

Den Raum der glatten Vektorfelder auf M schreiben wir als $\mathfrak{X}(M) := \Gamma(TM)$

Ein Vektorfeld ordnet also jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit einen Vektor im entsprechenden Tangentialraum zu.

Beispiel 6.1.2. Sei (x, U) eine Karte von M . Die Abbildungen

$$\frac{\partial}{\partial x^i}: p \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \quad i = 1, \dots, n$$

sind lokal definierte Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$, die von der Karte x induzierten *Koordinatenvektorfelder*; glatt sind sie nach Konstruktion des Tangentialbündels. Sie bilden einen lokalen Rahmen von TM über U .

Bemerkung 6.1.3. Nach Lemma 5.2.10 ist ein lokal definiertes Vektorfeld $X: U \rightarrow TU$ also genau dann glatt, wenn die Koeffizientenfunktionen $X^i: U \rightarrow \mathbb{R}$ in der Entwicklung

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

glatt sind.

6. Vektorfelder

Da die zur Koordinatenbasis duale Basis von T_p^*M durch die $dx^i|_p$ gebildet wird, bilden nach Lemma 5.3.2 außerdem die Abbildungen

$$dx^i: p \mapsto dx^i|_p$$

einen lokalen Rahmen von T^*M über U .

Bemerkung 6.1.4. Ein Vektorfeld $X: M \rightarrow TM$ kann man auf eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ anwenden: Man erhält eine Funktion $X(f)$ durch $(X(f))(p) := X_p(f)$. Man nennt $X(f)$ die *Ableitung von f in Richtung von X* (weil sie eben punktweise genau das ist).

Ist X glatt, dann ist diese Ableitung auch glatt, denn in Koordinaten gilt einfach $X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Man kann glatte Vektorfelder also als \mathbb{R} -lineare Abbildungen $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ auffassen. Aufgrund der Produktregel für Tangentialvektoren erfüllen Vektorfelder die Produktregel

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

Umgekehrt lassen sich Vektorfelder (auf glatten Mannigfaltigkeiten) auch äquivalent als (globale) Derivationen von $C^\infty(M)$ charakterisieren:

Satz 6.1.5 (Vektorfelder als globale Derivationen von $C^\infty(M)$). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ist $F: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ eine (globale) Derivation, d. h. eine \mathbb{R} -lineare Abbildung, die $F(fg) = F(f)g + fF(g)$ für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt, so gibt es ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $F(f) = X(f)$.

Beweis. Für jeden Punkt $p \in M$ soll $(F(fg))(p) = (F(f)(p))g(p) + f(p)(F(g))(p)$ gelten. Da die Abbildung $C^\infty(M) \ni f \mapsto (F(f))(p) \in \mathbb{R}$ außerdem \mathbb{R} -linear ist, gibt es nach Lemma 4.3.3 also einen eindeutigen Tangentialvektor $X_p \in T_pM$ mit $(F(f))(p) = X_p(f)$.

Wir müssen nur noch zeigen, dass das so definierte Vektorfeld $X: M \rightarrow TM$ glatt ist. Schreiben wir dazu bzgl. einer Karte (x, U) das Vektorfeld lokal als $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, so müssen wir zeigen, dass die Funktionen $X^i: U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt sind. Sei dafür $p \in U$. Wir wählen Funktionen $\tilde{x}^i \in C^\infty(M)$, die in einer offenen Umgebung V von p mit den Komponenten der Karte x^i übereinstimmen. Für $q \in V$ ist dann $X^i(q) = X^j(q)\delta_j^i = X^j(q)\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(q) = X^j(q)\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(q) = X_q(\tilde{x}^i)$, d. h. auf V stimmt X^i mit $X(\tilde{x}^i) = F(\tilde{x}^i)$ überein. Letzteres ist aber eine glatte Funktion auf ganz M , also ist X^i glatt auf V . Da p beliebig war, ist damit X^i glatt auf U . \square

Der letzte Teil des vorherigen Beweises zeigt außerdem:

Korollar 6.1.6. Ist $X: M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld auf M , sodass $X(f)$ für jede glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ wieder glatt ist, so ist X glatt. \square

6.2. Der Kommutator

Definition 6.2.1. Für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definiert man den *Kommutator* $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ als das Vektorfeld, das auf glatten Funktionen $f \in C^\infty(M)$ wirkt als

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Proposition 6.2.2. $[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$ definiert tatsächlich eine Derivation von $C^\infty(M)$ und damit ein Vektorfeld.

Beweis. Direktes Nachrechnen (Übung). □

Später werden wir eine geometrische Interpretation des Kommutators kennenlernen.

Lemma 6.2.3 (Eigenschaften des Kommutators). Der Kommutator von Vektorfeldern erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- (i) $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ist \mathbb{R} -bilinear.
- (ii) Für beliebige Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $[X, Y] = -[Y, X]$ (*Antisymmetrie*).
- (iii) Für beliebige Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (*Jacobi-Identität*).
- (iv) Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$ ist $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 6.2.4. Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) besagen, dass $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$ eine sogenannte *Lie-Algebra* über \mathbb{R} ist.

Lemma 6.2.5 (Kommutator in Koordinaten). Sei x eine Karte von M .

- (a) Für die Koordinatenvektorfelder gilt

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

- (b) Für $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ist

$$[X, Y] = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Beweis. Dass von derselben Karte induzierte Koordinatenvektorfelder kommutieren, folgt aus dem Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen); die Koordinatenformel folgt dann mit Lemma 6.2.3 (iv). □

6.3. Transport von Vektorfeldern

Hat man einen Diffeomorphismus $\phi: M \rightarrow N$, dann kann man damit Vektorfelder von M nach N „transportieren“:

Definition 6.3.1. Sei $\phi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Der *Pushforward* von X entlang von ϕ ist das Vektorfeld $\phi_*X \in \mathfrak{X}(N)$ definiert durch

$$(\phi_*X)_q := D\phi|_{\phi^{-1}(q)}(X_{\phi^{-1}(q)}) \quad \text{für } q \in N$$

bzw.

$$(\phi_*X)_{\phi(p)} = D\phi|_p(X_p) \quad \text{für } p \in M.$$

Man tut also das Einzige, was man sinnvoll tun kann, um aus X ein Vektorfeld auf N zu erhalten: Man bildet die entsprechenden Tangentialvektoren mit dem Differential von ϕ von M nach N ab. In die andere Richtung funktioniert das natürlich auch:

Definition 6.3.2. Der *Pullback* von $Y \in \mathfrak{X}(N)$ entlang von $\phi: M \rightarrow N$ ist $\phi^*Y := (\phi^{-1})_*Y$, also

$$(\phi^*Y)_p := D(\phi^{-1})|_{\phi(p)}(Y_{\phi(p)}) \quad \text{für } p \in M.$$

Bemerkung 6.3.3. Der Pullback ϕ^*X ist, trotz gleicher Notation, etwas anderes als der Rückzug von Schnitten: Im Gegensatz zu letzterem werden hier die einzelnen Vektoren aus $T_{\phi(p)}N$ noch nach T_pM geholt mithilfe des Differentials von ϕ^{-1} .

Man definiert Pushforward und Pullback auch für glatte Funktionen, und zwar naheliegenderweise als $\phi_*f := f \circ \phi^{-1}$ und $\phi^*g := g \circ \phi$ für einen Diffeomorphismus $\phi: M \rightarrow N$ und $f \in C^\infty(M), g \in C^\infty(N)$.

Lemma 6.3.4. Für einen Diffeomorphismus $\phi: M \rightarrow N$, $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist $\phi_*(fX) = \phi_*f \cdot \phi_*X$. Außerdem ist $\phi_*(X(f)) = (\phi_*X)(\phi_*f)$

Die entsprechenden Formeln gelten natürlich auch für Pullbacks.

Beweis. Übung. □

Lemma 6.3.5. Für einen Diffeomorphismus $\phi: M \rightarrow N$ und Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $[\phi_*X, \phi_*Y] = \phi_*[X, Y]$.

Beweis. Für $f \in C^\infty(M)$ ergibt sich $(\phi_*[X, Y])(\phi_*f) = \phi_*([X, Y](f)) = \phi_*\left(X(Y(f)) - Y(X(f))\right) = (\phi_*X)\left((\phi_*Y)(\phi_*f)\right) - (\phi_*Y)\left((\phi_*X)(\phi_*f)\right) = [\phi_*X, \phi_*Y](\phi_*f)$ mit dem vorigen Lemma. Da sich jedes $g \in C^\infty(N)$ als ϕ_*f schreiben lässt, gilt also $\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y]$ als Abbildungen auf $C^\infty(N)$. □

Lemma 6.3.6 (Pushforward in Koordinaten). Sind x Koordinaten für M und y Koordinaten für N , so berechnet sich der Pushforward von $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ zu $\phi_* X = (\phi_* X)^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ mit

$$(\phi_* X)^i = \left(X^j \frac{\partial (y^i \circ \phi)}{\partial x^j} \right) \circ \phi^{-1}.$$

Beweis. Übung. □

6.4. Integralkurven, Flüsse und die Lie-Ableitung

By magnetic curves, I mean the lines of magnetic forces, however modified by the juxtaposition of poles, which would be depicted by iron filings; or those to which a very small magnetic needle would form a tangent.

MICHAEL FARADAY

Experimental Researches in Electricity (1831)

Definition 6.4.1 (Integralkurven). Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und $p \in M$. Eine *Integralkurve* von X durch p ist eine glatte Kurve $\gamma: I \rightarrow M$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall um 0 ist, mit

$$\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \quad \forall t \in I.$$

Direkt aus der Definition ist klar, dass im Parameterbereich „verschobene“ Integralkurven wieder Integralkurven sind:

Lemma 6.4.2 (Verschobene Integralkurven). Ist $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ Integralkurve von $X \in \mathfrak{X}(M)$ durch $p \in M$, dann ist für $s \in (a, b)$ die durch $\lambda(t) := \gamma(s + t)$ definierte Kurve $\lambda: (a - s, b - s) \rightarrow M$ Integralkurve von X durch $\gamma(s)$. □

Laufen wir Integralkurven schneller entlang, so sind sie die Integralkurven des entsprechend skalierten Vektorfeldes:

Lemma 6.4.3. Ist γ Integralkurve von X durch p und $a \in \mathbb{R}$, so definiert $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(at)$ die Integralkurve $\tilde{\gamma}$ von aX durch p .

Beweis. Übung. □

Lokal existieren Integralkurven immer:

Lemma 6.4.4 (Lokale Existenz). Durch jeden Punkt p existiert lokal eine Integralkurve von X (d. h. es gibt ein Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$, auf dem eine Integralkurve existiert), und diese ist lokal eindeutig.

6. Vektorfelder

Beweis. In Koordinaten x um p schreiben wir $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und führen die Notationen $\eta^i := x^i \circ \gamma$, $\tilde{X}^i := X^i \circ x^{-1}$ ein. Damit lauten die zu lösenden Gleichungen

$$\eta^i(0) = x^i(p), \dot{\eta}^i(t) = \tilde{X}^i(\eta(t)).$$

Dies ist aber eine glatte gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, hat also nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. \square

Integralkurven sind auch global eindeutig:

Lemma 6.4.5 (Globale Eindeutigkeit). Sind $\gamma: I \rightarrow M$ und $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow M$ Integralkurven von X durch p , so ist $\gamma = \tilde{\gamma}$ auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $I \cap \tilde{I}$.

Beweis. Wir setzen $S := \{t \in I \cap \tilde{I} \mid \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)\} \subset I \cap \tilde{I}$. S ist nichtleer, da $0 \in S$. Nach Definition ist S wegen der Stetigkeit von γ und $\tilde{\gamma}$ abgeschlossen¹. Wenn wir noch zeigen können, dass S offen ist, dann folgt, da $I \cap \tilde{I}$ ein Intervall, also zusammenhängend ist, dass $S = I \cap \tilde{I}$.

Ist $s \in S$, so sind aber in einer Umgebung von $\gamma(s) =: q$ die Kartendarstellungen von sowohl γ als auch $\tilde{\gamma}$ Lösungen derselben gewöhnlichen Differentialgleichung mit demselben Anfangswert $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) = q$; nach der lokalen Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf gibt es also ein offenes Intervall J um s , auf dem sie übereinstimmen. Das heißt aber $J \subset S$; es folgt, dass S offen ist. \square

Insbesondere können wir jede Integralkurve eindeutig auf ein maximales Existenzintervall fortsetzen. Außerdem schneiden sich verschiedene Integralkurven eines Vektorfeldes nicht.

Oft fasst man die Integralkurven zu einer einzigen Abbildung zusammen:

Definition 6.4.6 (Fluss). Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld, und sei $I_p \subset \mathbb{R}$ zu jedem $p \in M$ das maximale Existenzintervall der Integralkurve von X durch p . Wir setzen $U := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times I_p \subset M \times \mathbb{R}$. Der Fluss des Vektorfeldes X ist die Abbildung $\Phi^X: U \rightarrow M$, die so definiert ist, dass zu jedem $p \in M$ die Kurve

$$I_p \ni t \mapsto \Phi^X(p, t) \in M$$

die maximale Integralkurve von X durch p ist. Φ^X löst also die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \Phi^X(p, t) = X_{\Phi^X(p, t)}, \quad \Phi^X(p, 0) = p$$

auf dem maximal möglichen Gebiet.

Oft schreiben wir $\Phi_t^X(p) := \Phi^X(p, t)$.

¹Genauer: Da M hausdorffsch ist, ist die Diagonale $\{(p, p) \mid p \in M\} \subset M \times M$ abgeschlossen. S ist das Urbild der Diagonalen unter der glatten, insb. stetigen Abbildung $(\gamma, \tilde{\gamma}): I \cap \tilde{I} \rightarrow M \times M$ und damit auch abgeschlossen.

Satz 6.4.7 (Eigenschaften von Flüssen). Sei $\Phi: U \rightarrow M$ der Fluss von $X \in \mathfrak{X}(M)$, und seien I_p wie in der vorigen Definition. Dann gilt:

- (i) $U \subset M \times \mathbb{R}$ ist offen und Φ ist glatt.
- (ii) Ist $s \in I_p$, so ist $I_{\Phi(p,s)} = I_p - s = \{t - s \mid t \in I_p\}$.
- (iii) $\Phi(p, 0) = p$ für alle $p \in M$.
- (iv) Ist $t \in I_p$ und $s \in I_{\Phi(p,t)}$, dann ist $t + s \in I_p$ und es gilt $(\Phi_s \circ \Phi_t)(p) = \Phi_{t+s}(p)$.
- (v) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $M_t := \{p \in M \mid (t, p) \in U\}$ eine offene Teilmenge von M , und $\Phi_t(p) = \Phi(p, t)$ definiert einen Diffeomorphismus $\Phi_t: M_t \rightarrow M_{-t}$.

Beweis. (iii) gilt nach Definition; (ii) und (iv) folgen aus der „Verschiebe-Eigenschaft“ von Lemma 6.4.2 und der Maximalität der Existenzintervalle.

Um (i) zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen folgt, dass es um jeden Punkt der Form $(p, 0) \in U$ eine offene Umgebung V in $M \times \mathbb{R}$ gibt, auf der der Fluss Φ existiert (d.h. $V \subset U$) und glatt ist. Mithilfe von Eigenschaft (iv) kann man diese Umgebungen nun auch zu anderen Punkten (p, t) transportieren; die Details sind ein bisschen technisch und bringen kein Mehrverständnis, deshalb lassen wir sie aus.

Zuletzt zeigen wir noch (v). Offen ist M_t nach Definition. Mit Eigenschaft (ii) gilt $p \in M_t \implies t \in I_p \implies I_{\Phi(p,t)} = I_p - t \xrightarrow{0 \in I_p} -t \in I_{\Phi(p,t)} \implies \Phi(p, t) \in M_{-t}$, also bildet Φ_t tatsächlich M_t auf M_{-t} ab. Nach (iv) ist nun $\Phi_{-t} \circ \Phi_t = \Phi_0 \stackrel{(ii)}{=} \text{id}_{M_t}$. Analog folgt $\Phi_t \circ \Phi_{-t} \stackrel{(ii)}{=} \text{id}_{M_{-t}}$, also sind Φ_t und Φ_{-t} zueinander inverse Diffeomorphismen. \square

Definition 6.4.8. Ein Vektorfeld heißt *vollständig*, wenn sich alle seine Integralkurven auf ganz \mathbb{R} als Definitionsbereich fortsetzen lassen.

Bemerkung 6.4.9. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ vollständig, so ist Φ_t^X für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus $\Phi_t^X: M \rightarrow M$. Wegen $\Phi_0^X = \text{id}_M$ und $\Phi_s^X \circ \Phi_t^X = \Phi_{t+s}^X$ ist also

$$\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), \quad t \mapsto \Phi_t^X$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Satz 6.4.10. Vektorfelder mit kompakten Träger sind vollständig.

Beweis. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\text{supp}(X)$ kompakt. Sei $\Phi: U \rightarrow M$ der Fluss von X . Da U offen ist, gibt es für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U_p \subset M$ und ein $\varepsilon_p > 0$, sodass $U_p \times (-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \subset U$. Für jedes $q \in U_p$ existiert dann also die Integralkurve durch q auf $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$. Da $\text{supp}(X)$ kompakt ist, gibt es endlich viele $p_1, \dots, p_k \in \text{supp}(X)$, sodass $\text{supp}(X) \subset \bigcup_{i=1}^k U_{p_i}$. Wir setzen $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_k}\}$. Für alle $p \in \text{supp}(X)$ existiert damit die Integralkurve durch p auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

6. Vektorfelder

Für $p \in M \setminus \text{supp}(X)$ ist $X_p = 0$, die Integralkurve durch p also die konstante Kurve $t \mapsto p$, die also auch auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ existiert. Damit existieren also alle Integralkurven von X auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Sei nun $p \in M$, und die Integralkurve γ durch p existiere auf dem Intervall $(a, b) \supset (-\varepsilon, \varepsilon)$. Setze $q := \gamma(b - \frac{\varepsilon}{2})$. $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(b - \frac{\varepsilon}{2} + t)$ definiert dann nach der Verschiebe-Eigenschaft die Integralkurve $\tilde{\gamma}$ durch q auf dem Intervall $(a - b + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$. Nach der obigen Überlegung existiert $\tilde{\gamma}$ aber auch auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kann also auf $(a - b + \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)$ fortgesetzt werden. Indem wir $\tilde{\gamma}$ wieder zurück verschieben, sehen wir also, dass γ auf $(a, b + \frac{\varepsilon}{2})$ existiert. Indem wir dieses Verfahren entsprechend oft wiederholen, können wir damit die obere Grenze des Existenzintervall von γ zu beliebig großen reellen Zahlen verschieben. Analog zeigt man, dass $\gamma(t)$ für beliebig kleine negative t existiert. \square

Definition 6.4.11 (Lie-Ableitung). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und entweder $T \in \mathcal{C}^\infty(M)$ oder $T \in \mathfrak{X}(M)$. Die Lie-Ableitung von T in Richtung von X ist $\mathcal{L}_X T \in \mathcal{C}^\infty(M)$ (oder $\in \mathfrak{X}(M)$), definiert durch

$$(\mathcal{L}_X T)(p) := \left. \frac{d}{dt} (\Phi_t^* T)(p) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^* T)(p) - T(p)}{t},$$

wobei $\Phi = \Phi^X$ der Fluss von X ist. Dabei ist $t \mapsto (\Phi_t^* T)(p) \in \mathbb{R}$ (oder $\in T_p M$ [sic!]) einfach eine Abbildung von \mathbb{R} in einen Vektorraum, von der wir die übliche Ableitung nehmen.

Anschaulich gesprochen berechnet $\mathcal{L}_X T$ also, wie sehr sich das geometrische Objekt T ändert, wenn wir uns „infinitesimal“ in Richtung von X fließen lassen.

Lokal um jeden Punkt $p \in M$ ist Φ_t für genügend kleines t ein Diffeomorphismus, der Pullback existiert also und die Definition ergibt Sinn. Die Glattheit von $\mathcal{L}_X T$ folgt, da T und der Fluss von X glatt sind.

Bemerkung 6.4.12. Ist $\Phi = \Phi^X$ der Fluss von X und $a \in \mathbb{R}$, so ist der Fluss von aX durch $\Phi^{aX}(p, t) = \Phi(p, at)$ gegeben, und folglich ist $\left. \frac{d}{dt} (\Phi_{at}^* T)(p) \right|_{t=0} = (\mathcal{L}_{aX} T)(p)$. Andererseits ist nach Kettenregel $\left. \frac{d}{dt} (\Phi_{at}^* T)(p) \right|_{t=0} = a \left. \frac{d}{dt} (\Phi_t^* T)(p) \right|_{t=0} = a(\mathcal{L}_X T)(p)$. Also gilt $\mathcal{L}_{aX} T = a\mathcal{L}_X T$.

Lemma 6.4.13. Für eine glatte Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist $\mathcal{L}_X f = X(f)$ die übliche Ableitung.

Beweis. Sei Φ der Fluss von X . Es ist $(\mathcal{L}_X f)(p) = \left. \frac{d}{dt} (\Phi_t^* f)(p) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(\Phi_t(p)) \right|_{t=0} = df|_p \left(\left. \frac{d}{dt} \Phi_t(p) \right|_{t=0} \right) = df|_p (X_p) = X_p(f)$ nach Kettenregel. \square

Lemma 6.4.14. Für ein Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ der Kommutator.

6.4. Integralkurven, Flüsse und die Lie-Ableitung

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass für eine beliebige glatte Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung von 0, nach Kettenregel $\frac{d}{dt}F(t, t) = (\partial_1 F)(t, t) + (\partial_2 F)(t, t)$ gilt, insbesondere also

$$\left. \frac{d}{dt}F(t, t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}F(t, 0) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt}F(0, t) \right|_{t=0}. \quad (*)$$

Sei nun Φ der Fluss von X . Für jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $p \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_p(f) &= \left(\left. \frac{d}{dt}(\Phi_t^* Y) \right|_{t=0} \right)_p (f) \\ &= df|_p \left(\left. \frac{d}{dt}(\Phi_t^* Y) \right|_{t=0} \right) \\ (df|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}) &= \left. \frac{d}{dt} df|_p \left((\Phi_t^* Y)_p \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left((\Phi_t^* Y)(f) \right) (p) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left((\Phi_t^* Y)(\Phi_t^* \Phi_{-t}^* f) \right) (p) \right|_{t=0} \\ (\text{Lemma 6.3.4}) &= \left. \frac{d}{dt} \left(\Phi_t^* \left(Y(\Phi_{-t}^* f) \right) \right) (p) \right|_{t=0} \\ ((* \text{ und } \Phi_0 = \text{id}_M) &= \left. \frac{d}{dt} \left(\Phi_t^* \left(Y(f) \right) \right) (p) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} \left(Y(\Phi_{-t}^* f) \right) (p) \right|_{t=0} \\ (\text{Satz von Schwarz}) &= \left(\mathcal{L}_X \left(Y(f) \right) \right) (p) + \left(Y \left(\left. \frac{d}{dt} \Phi_{-t}^* f \right|_{t=0} \right) \right) (p) \\ &= \left(\mathcal{L}_X \left(Y(f) \right) \right) (p) + \left(Y \left(-\mathcal{L}_X f \right) \right) (p) \\ (\text{Lemma 6.4.13}) &= \left(X(Y(f)) - Y(X(f)) \right) (p) = \left([X, Y](f) \right) (p) \end{aligned}$$

Damit ist $(\mathcal{L}_X Y)(f) = [X, Y](f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, also $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$. □

Dies gibt uns eine geometrische Interpretation des Vektorfeld-Kommutators: $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$ gibt an, wie sehr sich Y ändert, wenn wir es entlang von X fließen lassen.

7. Lie-Gruppen

Symmetry is a vast subject, significant in art and nature. Mathematics lies at its root, and it would be hard to find a better one on which to demonstrate the working of the mathematical intellect.

HERMANN WEYL
Symmetry (1952)

7.1. Grundlagen

Definition 7.1.1 (Lie-Gruppe). Eine *Lie-Gruppe* ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G mit einer Gruppenstruktur, sodass die Verknüpfung $\cdot: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ und die Inversion $i: G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ glatte Abbildungen sind.

Wir definieren die *Linkstranslation* entlang g :

$$l_g: G \rightarrow G, h \mapsto g \cdot h$$

Es gelten $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}$ und $l_g \circ l_h = l_{g \cdot h}$, also ist $l: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Analog lassen sich auch die *Rechtstranslation* r_g (mit $r_g \circ r_h = r_{h \cdot g}$) und die *Konjugation* $c_g := r_{g^{-1}} \circ l_g$ definieren. Rechts- und Linkstranslationen kommutieren und sind (Anti-) Automorphismen der Lie-Gruppe.

Beispiel 7.1.2.

- (a) \mathbb{R}^n ist zusammen mit der Addition von Vektoren eine Lie-Gruppe.
- (b) $GL(V)$ ist für $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ eine n^2 -dimensionale und $SL(n, \mathbb{R})$ eine $(n^2 - 1)$ -dimensionale Lie-Gruppe (Die komplexen Versionen haben die doppelte Dimension). Weitere Beispiele sind die orthogonalen und unitären Gruppen $O(n)$ ($n(n - 1)/2$ -dimensional), $SO(n)$ ($n(n - 1)/2$), $U(n)$ (n^2) und $SU(n)$ ($n^2 - 1$).
- (c) $S^1 \cong \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}z = 1\}$ bekommt durch die Multiplikation in der komplexen Ebene eine Gruppenstruktur und ist damit eine Lie-Gruppe (nämlich gerade $U(1)$).

Sei G von nun an eine Lie-Gruppe mit neutralem Element e .

7. Lie-Gruppen

Definition 7.1.3 (Linksinvariante Vektorfelder). Ein *linksinvariantes Vektorfeld* ist ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$, das „invariant“ unter dem push-forward von Linkstranslationen ist. Das heißt, dass folgende Gleichung gilt:

$$((l_g)_* X)_h \stackrel{\text{Def.}}{=} Dl_g|_{g^{-1} \cdot h} X_{g^{-1} \cdot h} = X_h \quad \forall g, h \in G$$

Die Menge der linksinvarianten Vektorfelder heißt $\mathfrak{X}^L(G)$.

Satz 7.1.4. Die linksinvarianten Vektorfelder bilden eine endlich-dimensionale Unter- algebra der Algebra der Vektorfelder (mit dem Kommutator als Verknüpfung).

Sie ist als Vektorraum isomorph zum Tangentialraum des neutralen Elements $T_e G$.

Beweis. Zum Beweis konstruieren wir den kanonischen Isomorphismus und zeigen, dass die linksinvarianten Vektorfelder unter Bildung von Kommutatoren abgeschlossen sind:

$$\begin{aligned} \Psi: \mathfrak{X}^L(G) &\rightarrow T_e G, X \mapsto X_e \\ L: T_e G &\rightarrow \mathfrak{X}^L(G), v \mapsto L(v) \\ L(v): G &\rightarrow TG, g \mapsto Dl_g|_e v \end{aligned} \tag{7.1}$$

L ist wohldefiniert, denn für $v \in T_e G$ und $g, h \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} ((l_g)_* L(v))_h &= Dl_g|_{g^{-1} \cdot h} L(v)_{g^{-1} \cdot h} \\ &= Dl_g|_{g^{-1} \cdot h} (Dl_{g^{-1} \cdot h}|_e v) \\ \text{(Kettenregel)} &= D(l_g \circ l_{g^{-1}})|_h Dl_h|_e v \\ &= Dl_h|_e v \\ &= L(v)_h \end{aligned}$$

Außerdem gilt $\Psi \circ L = \text{id}_{T_e G}$:

$$\Psi(L(v)) = (L(v))_e = Dl_e|_e v = v$$

und die Umkehrung $L(\Psi(X)) = X$ wird punktweise durch Ausnutzen der Linksinvarianz klar:

$$\begin{aligned} X_g &= Dl_g|_{g^{-1} \cdot g} X_{g^{-1} \cdot g} = ((l_g)_* X)_g \\ &= Dl_g|_e X_e \\ &= L(X_e)_g \end{aligned}$$

Beide Abbildungen sind linear, für L gilt dies, da das Differential linear ist.

Nun bleibt zu zeigen, dass der Kommutator zweier linksinvarianten Vektorfelder linksinvariant ist (Übung). \square

Definition 7.1.5 (Lie-Algebra). Die *Lie-Algebra* einer Lie-Gruppe ist der Vektorraum $\mathfrak{g} := T_e G$ mit der Verknüpfung

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, (v, w) \mapsto [v, w] := [L(v), L(w)]_e,$$

wobei wir den kanonischen Isomorphismus $L: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}^L(G)$ aus Gleichung (7.1) benutzt haben. Nach Konstruktion ist diese Verkettung bilinear, antisymmetrisch und erfüllt die Jacobi-Identität (siehe Lemma 6.2.3). Sie heißt die *Lie-Klammer* von \mathfrak{g} .

Bemerkung 7.1.6. Die Eigenschaften des Kommutators (aus Lemma 6.2.3) von Vektorfeldern gelten nun auch für die Lie-Klammer auf der Lie-Algebra \mathfrak{g} .

Per Konstruktion wird der kanonische Isomorphismus L zu einem Homomorphismus von Lie-Algebren (also einer \mathbb{R} -linearen Abbildung mit $[\cdot, \cdot] \circ (L \times L) = L \circ [\cdot, \cdot]$, wobei links der Kommutator und rechts die Lie-Klammer stehen).

Beispiel 7.1.7. Die Lie-Algebra der $GL(V)$ ist der Vektorraum der Endomorphismen $\text{End}(V)$. Dies ist klar, wenn man $GL(V)$ als (offene) Teilmenge von $\text{End}(V)$ betrachtet: Der Tangentialraum ist dann kanonisch $\text{End}(V)$.

Lemma 7.1.8. Linksinvariante Vektorfelder sind vollständig, das heißt, ihre Integralkurven können auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden.

Beweis. Die Idee ist hier, dass sich Integralkurven verschieben lassen, wie in Lemma 6.4.2, man aber auf Lie-Gruppen auch durch die Linkstranslationen Integralkurven verschieben kann, was hier aufgrund der Linksinvarianz keinen Unterschied macht. Sei also $\gamma_g: I_g \rightarrow G$ eine maximale Integralkurve von $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ in $g \in G$ und $I_g \neq \mathbb{R}$, dann ist auch $\gamma_h: I_g \rightarrow G, t \mapsto l_h(\gamma_g(t))$ eine Integralkurve in $h \cdot g \forall h \in \gamma_g(I_g)$ (Kettenregel):

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \gamma_h(t) \right|_{t=s} &= D l_h|_{\gamma_g(s)} X_{\gamma_g(s)} \\ &= X_{h \cdot \gamma_g(s)} \end{aligned}$$

Damit haben wir also eine Integralkurve γ_h , die auf I_g definiert ist. Wenn wir nun aber $a \in I_g$ wählen und $h := \gamma_g(a) \cdot g^{-1}$ setzen, so ist die verschobene Kurve $\lambda(t) = \gamma_g(t+a) \forall t \in I_g - a$ auch eine Integralkurve von X in $\gamma_g(a) = h \cdot g$ und wir können den Definitionsbereich von γ_h um a verlängern! Indem wir die so erhaltene Kurve wieder zurück verschieben, haben wir den Definitionsbereich von γ_g verlängert. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme der Maximalität, also muss für maximale Integralkurven schon $I = \mathbb{R}$ gelten. \square

7.2. Die Exponentialabbildung

Definition 7.2.1 (Exponentialabbildung). Die *Exponentialabbildung* $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ ist durch den Fluss der linksinvarianten Vektorfelder definiert:

$$\exp(v) := \Phi_1^{L(v)}(e)$$

7. Lie-Gruppen

Dies entspricht gerade der Integralkurve von $L(v)$ in e ausgewertet an der Stelle 1.

Lemma 7.2.2. Die Exponentialabbildung erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\exp(0) = e$
- (ii) Für alle $v \in \mathfrak{g}$ ist $t \mapsto \exp(tv)$ die Integralkurve von $L(v)$ in e .
- (iii) $\exp((s+t)v) = \exp(sv) \cdot \exp(tv) \quad \forall v \in \mathfrak{g}, s, t \in \mathbb{R}$

Beweis. Übung. (Für die zweite Eigenschaft helfen die Eigenschaften von Integralkurven bei Skalierung. Für die dritte Eigenschaft konstruiere zwei Integralkurven in $\exp(sv)$) \square

Lemma 7.2.3 (Fluss linksinvarianter Vektorfelder). Sei $X \in \mathfrak{X}^L(G)$.

Der Fluss von X ist durch die Exponentialabbildung wie folgt gegeben:

$$\Phi_t^X(p) = p \cdot \exp(tX_e) = l_p(\exp(tX_e)) = r_{\exp(tX_e)}(p)$$

Beweis. Es gilt $l_p(\exp(0)) = p = \Phi_0^X(p)$. Wir zeigen nun, dass $l_p(\exp(tX_e)) X$ erzeugt und die Aussage folgt dann aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung von Differentialgleichungen (oder von Integralkurven).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} l_p(\exp(tX_e)) &= \frac{d}{ds} l_{p \cdot \exp(tX_e)}(\exp(sX_e)) \Big|_{s=0} \\ &= D l_{p \cdot \exp(tX_e)} \Big|_e X_e \\ &= X_{p \cdot \exp(tX_e)} \end{aligned}$$

\square

Lemma 7.2.4. Für einen Lie-Gruppenhomomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ (einen glatten Gruppomorphismus zwischen Lie-Gruppen) kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{D\phi|_e} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

Man kann zeigen, dass die Abbildung $D\phi|_e$ ein Lie-Algebrenhomomorphismus ist, also mit den Kommutatoren verträglich ist.

Beweis. Wir wollen zeigen, dass $\exp(D\phi|_e v) = \phi(\exp(v)) \forall v \in \mathfrak{g}$ gilt. Sei $v \in \mathfrak{g}$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow G, \gamma(t) := \phi(\exp(tv))$ und zeige nun, dass γ die Integralkurve von $L(D\phi|_e v)$ in $e \in H$ ist:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \frac{d}{dt}(\phi(\exp(tv))) \\ &= D\phi|_{\exp(tv)} D l_{\exp(tv)}|_e v \\ &= D(\phi \circ l_{\exp(tv)})|_e v \\ &= D(l_{\phi(\exp(tv))} \circ \phi)|_e v \\ &= D l_{\gamma(t)}|_e D\phi|_e v \\ &= L(D\phi|_e v)_{\gamma(t)} \end{aligned}$$

Daraus folgt nun insbesondere $\phi(\exp(v)) = \gamma(1) = \exp(D\phi|_e v)$. \square

Bemerkung 7.2.5. Aufgrund von Lemma 7.2.2 lassen sich also die induzierten Lie-Algebrenhomomorphismen $D\phi|_e$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} D\phi|_e v &= \left. \frac{d}{dt} \exp(t D\phi|_e v) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \phi(\exp(tv)) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

7.3. Darstellungen

Definition 7.3.1 (Darstellung). Eine *Darstellung* ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho: G \rightarrow GL(V)$ für einem Vektorraum V . Damit ist nach Definition eines Gruppenhomomorphismus gerade $\rho(g)\rho(h) = \rho(g \cdot h) \forall g, h \in G$ und $\rho(e) = \text{id}_V$.

Beispiel 7.3.2. Schreibt man die Elemente der obigen Beispiele von Lie-Gruppen in ihrer üblichen Form als $n \times n$ -Matrizen, so erhält man (sogenannte fundamentale) Darstellungen durch die Matrixmultiplikation mit Elementen von \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n .

Definition 7.3.3 (Die Adjungierte Darstellung).

Die Konjugation liefert eine Darstellung jeder Lie-Gruppe auf ihrer Lie-Algebra, die sogenannte *Adjungierte Darstellung*:

$$\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g}), g \mapsto Dc_g|_e$$

Man erhält darüber hinaus auch eine Darstellung der Lie-Algebra selbst:

$$\text{ad} := D\text{Ad}|_e: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}),$$

7. Lie-Gruppen

Mit Lemma 7.2.3 und Bemerkung 7.2.5 folgt dann:

$$\begin{aligned}
 \text{ad}_v(w) &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(tv)}(w) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(Dc_{\exp(tv)}|_e w \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(Dr_{\exp(-tv)}|_{\exp(tv)} Dl_{\exp(tv)}|_e w \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(Dr_{\exp(-tv)}|_{\exp(tv)} L(w)_{\exp(tv)} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(D\Phi_{-t}^{L(v)}|_{\Phi_t^{L(v)}(e)} L(w)_{\Phi_t^{L(v)}(e)} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\left(\Phi_{-t}^{L(v)} \right)_* L(w) \right)_e \Big|_{t=0} \\
 &= \mathcal{L}_{L(v)}(L(w))_e \\
 &= [v, w]
 \end{aligned}$$

Also ist ad_v eine lineare Abbildung. Beachte: ad ist auch „im ersten Argument“ linear, also $\text{ad}_{v+w} = \text{ad}_v + \text{ad}_w \quad \forall v, w \in \mathfrak{g}$ und ist damit ein Gruppenhomomorphismus der Lie-Algebra als additive Gruppe, allerdings keine Abbildung in eine $GL(V)$ (Man sagt dennoch „induzierte Darstellung“).

Definition 7.3.4 (Killing-Form). Die *Killing-Form* ist eine symmetrische Bilinearform, definiert durch:

$$B_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \text{tr}(\text{ad}_v \circ \text{ad}_w).$$

Die Bilinearität folgt aufgrund der Linearität der Spur und ad und die Symmetrie aufgrund der Zyklicität der Spur.

Die Killing-Form ist in der Theorie der Lie-Gruppen und -Algebren sehr wichtig. Beispielsweise gilt:

Satz 7.3.5. Die Killing-Form ist negativ definit genau dann, wenn die Lie-Gruppe kompakt und das Zentrum der Lie-Algebra

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{v \in \mathfrak{g} \mid [v, w] = 0 \forall w \in \mathfrak{g}\}$$

trivial (= $\{0\}$) ist.

8. Tensorbündel und Tensorfelder

Dinge ändern sich.

DER VOLKSMUND

8.1. Tensorbündel

Wie wir zuvor gesehen haben, können wir aus zwei Vektorbündeln durch das Tensorprodukt ein neues Bündel erzeugen. In gewisser Weise bilden dabei Tensorprodukte von (Ko-)Tangentialbündeln eine natürliche Erweiterung der einer Mannigfaltigkeit „inhärenten“ Struktur.

Definition 8.1.1 (Tensorbündel). Das *Tensorbündel vom Typ (r, s)* über M ist das Vektorbündel

$$T^{(r,s)}M := (TM)^{\otimes r} \otimes (T^*M)^{\otimes s}$$

vom Rang n^{r+s} . Die Fasern sind also $T_p^{(r,s)}M = (T_pM)^{\otimes r} \otimes (T_p^*M)^{\otimes s} = (T_pM)^{(r,s)}$.

Ein *Tensorfeld vom Typ (r, s)* ist ein Schnitt des Tensorbündels vom Typ (r, s) . Wie bei Vektorfeldern schreiben wir bei Auswertung eines Tensorfeldes $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ den Punkt p als Subskript: $A_p := A(p)$.

Offensichtlich gelten $\Gamma(T^{(1,0)}M) = \mathfrak{X}(M)$ und $\Gamma(T^{(0,0)}M) = \mathcal{C}^\infty(M)$. Die Schnitte von $T^{(0,1)}M = T^*M$ heißen *1-Formen* und man schreibt für diese auch $\Omega^1(M)$.

Wie für Tensoren von Vektoren sind *einfache Tensorfelder* solche, die als (Tensor-)Produkt von Vektorfeldern und 1-Formen geschrieben werden können.

Aus dem (lokalen) Koordinatenrahmen $\frac{\partial}{\partial x^i}$ (von TM) und dem dualen Rahmen dx^i (von T^*M) erhält man mit dem Tensorprodukt lokale Rahmen des Tensorbündels (dies gilt natürlich auch für beliebige lokale Rahmen). Man schreibt dann die Komponenten eines Tensorfeldes A vom Typ (r, s) mit r oberen Indizes und s unteren Indizes: Es ist

$$A = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$$

wobei die Komponenten $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ (lokal definierte) glatte Funktionen sind.

Salopp gesprochen ist ein Tensorfeld also ein Tensor (über dem Tangentialraum), der sich von Punkt zu Punkt unserer Mannigfaltigkeit ändert. Indem wir punktweise für Tensoren bereits bekannte Operationen anwenden, können wir diese auf Tensorfelder fortsetzen:

8. Tensorbündel und Tensorfelder

Lemma 8.1.2. Die Tensorfelder vom Typ (r, s) $\Gamma(T^{(r,s)}M)$ bilden einen $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul und darüber hinaus bilden alle Tensorfelder mit dem „faserweisen“ Tensorprodukt $(A \otimes B)_p = A_p \otimes B_p$ eine $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Algebra (mit der kanonischen Identifikation $TM \otimes T^*M \cong T^*M \otimes TM$):

$$\mathcal{T}(M) := \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \Gamma(T^{(r,s)}M)$$

In Komponenten hat das Tensorprodukt von zwei Tensorfeldern $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$, $B \in \Gamma(T^{(t,u)}M)$ die Form $(A \otimes B)_{j_1 \dots j_s l_1 \dots l_u}^{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_t} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{l_1 \dots l_u}^{k_1 \dots k_t}$, insbesondere entspricht also das Tensorprodukt mit Funktionen $\mathcal{C}^\infty(M) = \Gamma(T^{(0,0)}M)$ gerade der „Skalarmultiplikation“ des $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Moduls.

Ebenso können wir durch punktweise Anwendung die Kontraktion von Tensoren zur Kontraktion von Tensorfeldern

$$C_{t,u}: \Gamma(T^{(r,s)}M) \rightarrow \Gamma(T^{(r-1,s-1)}M)$$

fortsetzen. Diese ist eine $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare Abbildung.

Beweis. Das Einzige, was zu zeigen ist, ist, dass die Ergebnisse der punktweisen Definitionen glatt sind und dass die Operationen $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear sind. Ersteres folgt, da die Komponentendarstellungen offensichtlich neue glatte Funktionen ergeben; zweiteres folgt direkt direkt nach Definition. \square

Bemerkung 8.1.3. Haben wir ein Tensorfeld $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$, so können wir bekanntlich punktweise $A_p \in T_p^{(r,s)}M$ als \mathbb{R} -multilineare Abbildung

$$A_p: \underbrace{T_p^*M \times \dots \times T_p^*M}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

auffassen (Satz 3.2.6). Per

$$(A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s))(p) := A_p((\omega_1)_p, \dots, (\omega_r)_p, (X_1)_p, \dots, (X_s)_p)$$

können wir A damit insgesamt auffassen als $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare Abbildung

$$A: \underbrace{\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M).$$

In dieser Notation ist das Tensorprodukt zweier Tensorfelder $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$, $B \in \Gamma(T^{(t,u)}M)$ folgendermaßen gegeben:

$$(A \otimes B)(\omega_1, \dots, \omega_{r+t}, X_1, \dots, X_{s+u}) = A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) B(\omega_{r+1}, \dots, \omega_{r+u}, X_{s+1}, \dots, X_{s+u})$$

Von der vorigen Bemerkung gilt auch die Umkehrung:

Satz 8.1.4 (Tensorfelder als $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildungen). Ist eine \mathbb{R} -multilineare Abbildung

$$A: \underbrace{\Omega^1(M) \times \cdots \times \Omega^1(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$ -multilinear, so ist sie durch ein Tensorfeld $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ gegeben.

Beweis. Dies folgt für 1-Formen und Vektorfelder aus Satz 5.3.3 und für Tensorfelder geht man ganz analog vor (Man zeigt also, dass eine solche multilineare Abbildung punktweise einen Tensor definiert, die Definition nur von dem Wert der Vektorfelder und 1-Formen am entsprechenden Punkt abhängt und dass das resultierende Tensorfeld glatt ist). \square

8.2. Tensorderivationen, Pullback und die Lie-Ableitung

Definition 8.2.1 (Tensorderivation). Eine (globale) Tensorderivation ist eine Familie von \mathbb{R} -linearen Abbildungen $\delta: \Gamma(T^{(r,s)}M) \rightarrow \Gamma(T^{(r,s)}M)$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) $\delta(A \otimes B) = (\delta(A)) \otimes B + A \otimes (\delta(B))$ (Produktregel)
- (ii) $C_{i,j}(\delta(A)) = \delta(C_{i,j}A)$ (Vertauschen mit Kontraktionen)

für beliebige Tensorfelder $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M), B \in \Gamma(T^{(t,u)}M)$.

Satz 8.2.2. Eine Tensorderivation ist durch ihre Wirkung auf Funktionen $C^\infty(M)$ und Vektorfeldern $\mathfrak{X}(M)$ eindeutig festgelegt.

Beweis. Wir halten zuerst fest, dass jede Tensorderivation δ auf den glatten Funktionen $C^\infty(M)$ nach Satz 6.1.5 durch ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ definiert ist.

Auf Vektorfeldern $Y \in \mathfrak{X}(M)$ bedeutet die Produktregel

$$\delta(fY) = f\delta(Y) + X(f)Y \quad \forall f \in C^\infty(M),$$

und für 1-Formen $\omega \in \Omega^1(M)$ haben wir

$$\begin{aligned} \delta(\omega(Y)) &= \delta(C_{1,1}(Y \otimes \omega)) \\ &= C_{1,1}\left((\delta(Y)) \otimes \omega + Y \otimes (\delta(\omega))\right) \\ &= \omega(\delta(Y)) + (\delta(\omega))(Y) \end{aligned}$$

Damit können wir also $\delta(\omega)$ eindeutig durch die Wirkung der Tensorderivation auf Funktionen und Vektorfeldern bestimmen.

Durch die Produktregel und \mathbb{R} -Linearität bekommt man entsprechend eine eindeutige Fortsetzung auf beliebige Tensoren. \square

8. Tensorbündel und Tensorfelder

Korollar 8.2.3 (Lie-Ableitung als Tensororderivation). Die Lie-Ableitung \mathcal{L}_X entlang eines Vektorfeldes X lässt sich eindeutig zu einer Tensororderivation fortsetzen.

Beweis. Hier muss man nur prüfen, dass die Lie-Ableitung auf Funktionen und Vektorfeldern die Produktregel erfüllt (Übung). \square

Definition 8.2.4 (Pullback von Tensorfeldern). Für einen Diffeomorphismus $f: N \rightarrow M$ und ein Tensorfeld $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ ist der *Pullback eines Tensorfelds* $f^*A \in \Gamma(T^{(r,s)}N)$ definiert als

$$\begin{aligned} (f^*A)_p(\eta_1, \dots, \eta_r, v_1, \dots, v_s) &:= \\ &A_{f(p)}(\eta_1 \circ Df^{-1}|_{f(p)}, \dots, \eta_r \circ Df^{-1}|_{f(p)}, Df|_p v_1, \dots, Df|_p v_s) \\ &= A_{f(p)}\left((Df^{-1}|_{f(p)})'\eta_1, \dots, (Df^{-1}|_{f(p)})'\eta_r, Df|_p v_1, \dots, Df|_p v_s\right) \end{aligned}$$

für Kovektoren $\eta_1, \dots, \eta_r \in T_p^*N$ und Vektoren $v_1, \dots, v_s \in T_pM$. Dabei bezeichnet $(Df^{-1}|_{f(p)})': T_p^*N \rightarrow T_{f(p)}^*M$ die duale Abbildung zu $Df^{-1}|_{f(p)}: T_{f(p)}M \rightarrow T_pN$.

Lemma 8.2.5. Sei $f: N \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus. Der Pullback entlang f erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- (i) Auf Funktionen und Vektorfeldern entspricht der hier definierte Pullback dem bereits bekannten, also $f^*g = g \circ f$ für $g \in C^\infty(M)$ und $(f^*X)_p = Df^{-1}|_{f(p)}(X_{f(p)})$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$.
- (ii) $f^*(A \otimes B) = (f^*A) \otimes (f^*B)$ für beliebige Tensorfelder A, B auf M (Verträglichkeit mit Tensorprodukten)
- (iii) $f^*(C_{i,j}A) = C_{i,j}(f^*A)$ (Vertauschen mit Kontraktionen)

Beweis. Die Form des Pullbacks für Funktionen und Vektorfelder rechnet man direkt nach.

Die Verträglichkeit mit Tensorprodukten folgt aus der Form des „ausgewerteten Tensorproduktes von Tensorfeldern“ aus Bemerkung 8.1.3.

Für die Kontraktion betrachten wir beispielhaft ein einfaches Tensorfeld $\omega \otimes X \in \Gamma(T^{(1,1)}M)$. Für dieses ist

$$\begin{aligned} C_{1,1}f^*(X \otimes \omega)_p &= C_{1,1}\left((f^*X)_p \otimes (\omega_{f(p)} \circ Df|_p)\right) \\ &= C_{1,1}\left(\left(Df^{-1}|_{f(p)}(X_{f(p)})\right) \otimes (\omega_{f(p)} \circ Df|_p)\right) \\ &= (\omega_{f(p)} \circ Df|_p)\left(Df^{-1}|_{f(p)}(X_{f(p)})\right) \\ &= (\omega(X))(f(p)) \\ &= \left(f^*(X(\omega))\right)_p \\ &= \left(f^*(C_{1,1}(X \otimes \omega))\right)_p. \end{aligned}$$

8.2. Tensorderivationen, Pullback und die Lie-Ableitung

Damit folgt die gewünschte Eigenschaft für beliebige Tensorfelder vom Typ $(1,1)$. Analog geht man auch für Tensoren von beliebigem Typ vor. \square

Satz 8.2.6 (Lie-Ableitung als Pullback). Für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit Fluss Φ^X ist die Lie-Ableitung eines Tensorfelds $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ durch die Ableitung des Pullback gegeben:

$$(\mathcal{L}_X A)_p = \left. \frac{d}{dt} \left((\Phi_t^X)^* A \right) \right|_{t=0}$$

Beweis. Mit dem vorigen Lemma folgt leicht, dass die über den Pullback definierte Lie-Ableitung eine Tensorderivation ist (Übung). Damit folgern wir aus Satz 8.2.2 die obige Identität. \square

9. Wenn noch Zeit ist: Kovariante Ableitungen

9.1. Grundlagen

Definition 9.1.1 (Kovariante Ableitung). Sei E ein Vektorbündel über M .

Eine *kovariante Ableitung* ist eine Abbildung

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), (X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma,$$

die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Linearität im ersten Argument:

$$\nabla_{X+fY}\sigma = \nabla_X\sigma + f\nabla_Y\sigma \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathcal{C}^\infty(M), \sigma \in \Gamma(E)$$

(ii) „Derivativität“ im zweiten Argument:

$$\nabla_X(f\sigma) = \underbrace{X(f)}_{\in \mathcal{C}^\infty(M)} \sigma + f\nabla_X\sigma \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathcal{C}^\infty(M), \sigma \in \Gamma(E)$$

Die kovariante Ableitung ist im Fall des Tangentialbündels eine weitere Tensorderiviation (definiert als Fortsetzung ihrer Wirkung auf Vektorfeldern und Funktionen). Ihren besonderen Nutzen sehen wir später im Kontext der Riemannschen Geometrie.

Sei von nun an ∇ eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel (E, π) .

Lemma 9.1.2. Sei $U \in M$ offen.

Es existiert eine eindeutige kovariante Ableitung $\nabla^U: \mathfrak{X}(U) \times \Gamma(E|_U) \rightarrow \Gamma(E|_U)$ sodass $\nabla^U_{X|_U} \sigma|_U = (\nabla_X \sigma)|_U \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \sigma \in \Gamma(E)$ gilt.

Beweis. Seien ∇' und ∇'' kovariante Ableitungen, die die obige Bedingung erfüllen. Wir müssen zeigen, dass diese beiden auf beliebigen lokalen Schnitten und Vektorfeldern identisch sind.

Da lokale Schnitte und Vektorfelder von Einschränkungen globaler Schnitte und Vektorfelder erzeugt werden, und die Wirkung von Vektorfeldern auf Funktionen ebenfalls nur lokal vom Vektorfeld abhängt, reicht es (aufgrund der $\mathcal{C}^\infty(U)$ -Linearität und der Derivativität), die Gleichheit der kovarianten Ableitungen auf Einschränkungen der Schnitte und Vektorfelder zu zeigen. Diese ist jedoch nach Voraussetzung gegeben. \square

9. Wenn noch Zeit ist: Kovariante Ableitungen

Lemma 9.1.3 (Lokalität kovarianter Ableitungen). Sind $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ auf einer Umgebung von $p \in M$ identisch, so gilt:

- (a) $(\nabla_{X_1}\sigma_1)(p) = (\nabla_{X_2}\sigma_1)(p)$
- (b) $(\nabla_{X_1}\sigma_1)(p) = (\nabla_{X_1}\sigma_2)(p)$

Beweis. Übung. (Für die 2. darf Lemma 9.1.2 verwendet werden.) □

Wir wollen noch allgemein untersuchen, wie kovariante Ableitungen in lokalen Trivialisierungen aussehen.

Sei $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ ein lokaler Rahmen über $U \subset M$ und $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, sodass $\phi(\sigma_i) = e_i$ die Standardbasis ist. Damit ist dann $\text{span}_{\mathbb{R}}\{(\sigma_1)_x, \dots, (\sigma_k)_x\} = E_x \cong \mathbb{R}^k$ und $\Gamma(E|_U) = \text{span}_{C^\infty(U)}\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$.

Die kovariante Ableitung des Rahmens ist wieder ein Schnitt, lässt sich also in Komponenten bezüglich dieses Rahmens schreiben, sodass die kovariante Ableitung bezüglich eines gegebenen Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(U)$ wie eine Matrix wirkt:

$$(A_X)_b^a \sigma_a = \nabla_X \sigma_b$$

Man erhält punktweise ($x \in M$) lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} (A_X)_x: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^k, \\ (v^1, \dots, v^k) &\mapsto \text{pr}_2(\phi((\nabla_X v^i \sigma_i)(x))) = ((A_X)_{b,x}^a v^b) e_a \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen der \mathbb{R} -Linearität der kovarianten Ableitung und der Kompatibilität von Rahmen und Trivialisierung folgt. Damit ist A_X ein Schnitt des trivialen Bündels $U \times \text{End}(\mathbb{R}^k)$. Die *Zusammenhangs(eins)form* ist die Abbildung $X \mapsto A_X \in \Gamma(U \times \mathbb{R}^k)$.

Ist zusätzlich U eine Koordinatenumgebung, dann definiert man die *Zusammenhangskoeffizienten* $A_{ib}^a := (A_{\partial_i})_b^a$.

Für einen beliebigen lokalen Schnitt $\sigma = f^a \sigma_a \in \Gamma(E|_U)$ und ein lokales Vektorfeld $X = g^i \partial_i$ (mit $f^a, g^i \in C^\infty(U)$) lässt sich die kovariante Ableitung dann folgendermaßen schreiben:

$$\nabla_X \sigma = \left(X(f^a) + (A_X)_b^a f^b \right) \sigma_a = g^i \left(\partial_i(f^a) + A_{ib}^a f^b \right) \sigma_a$$

Für Elemente $\rho_c = \tau_c^d \sigma_d$ eines anderen lokalen Rahmens und $\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$ einer Koordinatenbasis (wobei im ersten Faktor rechts mit x^i die Koordinatenfunktionen φ^i gemeint sind), lassen sich damit auch die Zusammenhangskoeffizienten B_{jd}^c bezüglich des Rahmens ρ und der Koordinaten y berechnen:

$$\begin{aligned} B_{jd}^c &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \left((\tau^{-1})_a^c \frac{\partial \tau_d^a}{\partial x^i} + (\tau^{-1})_a^c A_{ib}^a \tau_d^b \right) \\ B_j &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \left(\tau^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} + \tau^{-1} A_i \tau \right) \quad \text{als Matrizen} \end{aligned}$$

Man sieht dies durch Vergleich der Koeffizienten bezüglich der Basen:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \rho_d &= B_{jd}^c \rho_c = B_{jd}^c \tau_c^d \sigma_d \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \left(\partial_i(\tau_d^a) + A_{ib}^a \tau_d^b \right) \sigma_a = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \left(\partial_i(\tau_d^a) + A_{ib}^a \tau_d^b \right) (\tau^{-1})_a^c \rho_c \end{aligned}$$

Beachte: Die Zusammenhangskoeffizienten sind nicht Koeffizienten eines Tensors.

Satz 9.1.4. Auf jedem Vektorbündel existiert eine kovariante Ableitung.

Beweis. Schematisch: Wähle eine Überdeckung des Bündels (vom Rang k) durch lokale Trivialisierungen (über offenen Mengen U) und eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann wählen wir auf den $U \times \mathbb{R}^k$ die kovariante Ableitung so, dass die Zusammenhangskoeffizienten in der Standardbasis (also dem globalen Standardrahmen) verschwinden. Durch „kartenweises Zurückziehen“ (beachte: nur das zweite Argument wird verändert) dieser kovarianten Ableitung entlang der Trivialisierungen erhalten wir eine kovariante Ableitung auf dem Vektorbündel. Die Eigenschaften der kovarianten Ableitung erhält man direkt durch Nachrechnen, wobei hier wichtig ist, dass die Summe der Hutfunktionen punktweise 1 ergibt (sonst verliert man Derivativität). \square

9.2. Induzierte Zusammenhänge

Insbesondere interessieren uns kovariante Ableitungen entlang von Kurven $\gamma: I \rightarrow M$. Dies entspricht einer kovarianten Ableitung auf dem auf das Intervall I zurückgezogenen Bündel. Wir müssen also die kovariante Ableitung ebenfalls zurückziehen.

Satz 9.2.1 (Rückzug von kovarianten Ableitungen). Sei $f: N \rightarrow M$.

Für eine kovariante Ableitung ∇ auf dem Vektorbündel (E, π) gilt: $\exists!$ kovariante Ableitung $f^*\nabla: \mathfrak{X}(N) \times \Gamma(f^*E) \rightarrow \Gamma(f^*E)$ sodass für alle $X \in \mathfrak{X}(N), \sigma \in \Gamma(E), p \in N$ gilt:

$$((f^*\nabla)_X (f^*\sigma))(p) = f^*(\nabla_Y \sigma)(p)$$

mit einem Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$ sodass $Y_{f(p)} = Df|_p X_p$. Diese kovariante Ableitung ist der *Rückzug der kovarianten Ableitung* ∇ .

Seien A_{ib}^a die Zusammenhangskoeffizienten von ∇ in einer Koordinatenumgebung $U \subset M$ und bezüglich eines Rahmens σ_a . Fasst man f in Koordinaten $u \in V \subset N$ (mit $f(V) \subset U$) als Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf, so sind die Zusammenhangskoeffizienten der zurückgezogenen kovarianten Ableitung bezüglich des Rahmens $f^*\sigma_a$ durch $\frac{\partial f^i}{\partial w^j} A_{ib}^a$ gegeben.

Beweis. Auf $\mathfrak{X}(N) \times f^*(\Gamma(E))$ ist der Rückzug wegen der Lokalität der kovarianten Ableitungen wohldefiniert (insbesondere unabhängig von der Wahl $Y \in \mathfrak{X}(M)$). Linearität und Derivativität folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der ursprünglichen

9. Wenn noch Zeit ist: Kovariante Ableitungen

kovarianten Ableitung und der Linearität des Differentials. Man setzt die kovariante Ableitung lokal derivativ auf $\Gamma(f^*E|_U)$ fort (da $f^*(\Gamma(E|_U))$ alle Schnitte $\Gamma(f^*E|_U)$ erzeugt). Eindeutigkeit ohne Beweis. \square

Definition 9.2.2. Für eine Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ sei ∂_t das Vektorfeld, das zu der Karte $id_I: I \rightarrow I$ gehört. Man erhält dann eine kovariante Ableitung auf I :

$$\nabla_t := (\gamma^*\nabla)_{\partial_t}: \Gamma(\gamma^*E) \rightarrow \Gamma(\gamma^*E)$$

Das „Auswerten“ an ∂_t schränkt die Allgemeinheit nicht ein, da dieses Vektorfeld ja einen globalen Rahmen des Tangentialbündels TI darstellt.

Weiter können wir $X := \dot{\gamma}$ als Schnitt von $\gamma^*(TM)$ auffassen mit $X_t = \dot{\gamma}(t)$.

9.3. Parallele Schnitte

Definition 9.3.1 (Parallele Schnitte). Sei $\gamma: I \rightarrow M$ eine Kurve.

Ein entlang γ *kovariant konstanter* (auch *horizontaler* oder *paralleler*) Schnitt ist ein Schnitt $\sigma \in \Gamma(\gamma^*E)$, sodass gilt:

$$\nabla_t \sigma = 0$$

Lemma 9.3.2. Sei $\gamma: I \rightarrow M$ eine Kurve, $a \in I$, $v \in E_{\gamma(a)}$.

Es existiert genau ein paralleler Schnitt $\sigma \in \Gamma(\gamma^*E)$ mit $\sigma(a) = v$.

Der Paralleltransport ist der folgende Isomorphismus von Vektorräumen:

$$P_a(b): E_{\gamma(a)} \rightarrow E_{\gamma(b)}, v \mapsto \sigma(b)$$

Mit entsprechendem Schnitt σ wie oben, in Abhängigkeit von v .

Beweis. In Koordinaten von M und einem lokalen Rahmen σ_c löst $\sigma = f^c \gamma^* \sigma_c$ die folgende homogene, lineare Differentialgleichung:

$$\dot{f}^c + A_{id}^c \dot{\gamma}^i f^d = 0$$

Man erhält die eindeutige Lösung f^c mit $f^c(a) = v^c$ und $\sigma := f^c \sigma_c$ lässt sich durch „Verkleben“ von Lösungen auf ganz I fortsetzen.

Der Paralleltransport ist wohldefiniert wegen der Eindeutigkeit von Lösungen linearer Differentialgleichungen. Aufgrund der Homogenität und Linearität ist der Paralleltransport außerdem linear. Für die Isomorphie wählt man b und $\sigma(b)$ als neue Anfangsbedingungen. Dann ist eben σ wieder eine Lösung und damit $P_a(b)P_b(a) = id_{E_{\gamma(a)}}$ und analog $P_b(a)P_a(b) = id_{E_{\gamma(b)}}$. \square

Dieses Lemma gibt uns eine Anschauung davon, was die kovariante Ableitung leistet: Sie schreibt einen Zusammenhang zwischen einzelnen Fasern vor, indem sie anschaulich angibt, wann ein Schnitt entlang einer Kurve nicht variiert (Manchmal

wird die kovariante Ableitung deshalb auch „Zusammenhang“ genannt. Wir bleiben bei unserer Konvention).

Man kann auch andersherum eine kovariante Ableitung aus einem Paralleltransport gewinnen (Ohne Beweis):

Lemma 9.3.3. Sei $\gamma: I \rightarrow M$ eine Kurve, $a = 0 \in I$, $x = \gamma(0)$.

Der Paralleltransport erfüllt die folgende Eigenschaft:

$$\left. \frac{d}{dt} P_0^{-1}(t) \sigma(\gamma(t)) \right|_{t=0} = (\nabla_{\dot{\gamma}(0)} \sigma)(x)$$

Aus den obigen Aussagen ist klar, dass dies nur von $\dot{\gamma}(0)$ abhängt, nicht von der ganzen Kurve. Dies erläutert anschaulich, warum man durch diese Formel auch eine kovariante Ableitung definieren kann.

9.4. Geodäten

Definition 9.4.1. Eine *affine kovariante Ableitung* ist eine kovariante Ableitung auf dem Tangentialbündel. Dies bringt zusätzliche Struktur mit sich! Insbesondere lässt sich eine affine kovariante Ableitung als Tensororderivation fortsetzen (mit den nötigen Eigenschaften), wobei $\nabla_X f = X(f) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M)$.

Wir schreiben dafür $X \mapsto \nabla_X \in \text{Der}(\mathcal{T}(M))$. In Koordinaten sieht dies für ein Tensorfeld A vom Typ $(1,1)$ folgendermaßen aus:

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} A)_j^i = (\partial_k A_j^i + \Gamma_{kl}^i A_j^l - \Gamma_{kj}^l A_l^i)$$

mit negativem Vorzeichen für untere Indizes und positivem Vorzeichen für obere Indizes.

Definition 9.4.2 (Geodäte). Eine Geodäte ist eine Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ sodass das Tangentialfeld $\dot{\gamma} \in \Gamma(\gamma^* TM)$ parallel entlang der Kurve ist: $\nabla_t \dot{\gamma} = 0$.

In lokalen Koordinaten auf M erfüllt eine Geodäte die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{\gamma}^i(t) + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0$$

Man sieht, dass die Eigenschaft einer Kurve, Geodäte zu sein, nicht invariant unter Reparametrisierung ist.

Satz 9.4.3. Für $x \in M$, $v \in T_x M$ existiert eine eindeutige maximal fortgesetzte Geodäte $\gamma_{(x,v)}: I_{(x,v)} \rightarrow M$ sodass $0 \in I_{(x,v)}$, $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

Weiter gilt $\forall x \in M, v \in T_x M, \lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $I_{(x,\lambda v)} = \lambda I_{(x,v)}$

(b) $\gamma_{(x,\lambda v)}(t) = \gamma_{(x,v)}(\lambda t)$

9. Wenn noch Zeit ist: Kovariante Ableitungen

(c) $\mathcal{E} := \{(x, v) \in TM \mid 1 \in I_{(x,v)}\} \subset TM$ ist offen

(d) $\mathcal{E}_x := \mathcal{E} \cap T_x M$ ist ein (offenes) Sterngebiet

Definition 9.4.4. Eine Mannigfaltigkeit heißt *geodätisch vollständig*, wenn sich jede Geodäte auf $I = \mathbb{R}$ fortsetzen lässt, also wenn $I_{(x,v)} = \mathbb{R} \quad \forall (x, v) \in TM$ oder äquivalent $\mathcal{E} = TM$ gilt.

Definition 9.4.5 (Exponentialabbildung). Die *Exponentialabbildung* ist die Abbildung $\text{Exp}: \mathcal{E} \rightarrow M$, die punktweise definiert ist als $\text{Exp}_x: \mathcal{E}_x \rightarrow M, v \mapsto \gamma_{(x,v)}(1)$.

Für die Exponentialabbildung gilt $\forall (x, v) \in \mathcal{E}$:

(i) $\text{Exp}_x(tv) = \gamma_{(x,tv)}(1) = \gamma_{(x,v)}(t) \quad \forall t \in I_{(x,v)}$

(ii) $D\text{Exp}_x|_0 = \text{id}_{T_x M}$

A. Details zur Existenz von Zerlegungen der Eins

Hier geben wir ein paar mehr Details zur Existenz von Zerlegungen der Eins.

Definition A.1. Sei M ein topologischer Raum und $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von M . Eine *Verfeinerung* dieser Überdeckung ist eine Überdeckung $\{Y_j\}_{j \in J}$, sodass jedes Y_j in einem der X_i enthalten ist.

Lemma A.2. Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen eines topologischen Raums M . Ist $\{X_i\}_{i \in I}$ lokal endlich, so ist $\overline{\bigcup_{i \in I} X_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{X_i}$. Außerdem ist auch $\{\overline{X_i}\}_{i \in I}$ lokal endlich.

(ohne Beweis)

Wie im Haupttext gesagt, ist die Idee des Beweises der Existenz von Zerlegungen der Eins, die ψ_i aus Hutfunktionen auf Kugeln zu konstruieren, die Bilder von Kartenumgebungen in den gegebenen offenen Mengen sind. Um das auszuführen, brauchen wir noch einen kleinen technischen Hilfssatz:

Lemma A.3. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Es existieren eine Familie $\{(\varphi_j, V_j)\}_{j \in J}$ von Karten von M , die M überdecken, sowie eine weitere offene Überdeckung $\{B_j\}_{j \in J}$ von M mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $\{V_j\}_{j \in J}$ ist eine Verfeinerung von $\{U_i\}_{i \in I}$.
- (ii) Für alle $j \in J$ ist $\overline{B_j} \subset V_j$.
- (iii) $\{B_j\}_{j \in J}$ ist lokal endlich.
- (iv) Zu jedem $j \in J$ existiert ein $r_j > 0$ mit $\varphi_j(B_j) = B_{r_j}(0)$ (d. h. die Karte bildet B_j auf eine Kugel ab).

(ohne Beweis, da zu technisch/topologisch)

Bemerkung A.4. Dieses Lemma zeigt insbesondere, dass Mannigfaltigkeiten *parakompakt* sind: Jede offene Überdeckung hat eine lokal endliche Verfeinerung.

Beweis von Satz 4.2.3 über Existenz von Zerlegungen der Eins. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Wir wollen zeigen, dass es eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins gibt.

A. Details zur Existenz von Zerlegungen der Eins

Wende das vorige Lemma an, um $\{(\varphi_j, V_j)\}_{j \in J}$, $\{B_j\}_{j \in J}$, $\{r_j\}_{j \in J}$ wie dort zu erhalten. Für jedes $j \in J$ wählen wir eine Hutfunktion $H_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, die auf $B_{r_j}(0)$ positiv ist und außerhalb von $B_{r_j}(0)$ verschwindet (diese existiert nach Lemma 4.1.3 für $r' = r_j$).

Für $j \in J$ definieren wir $f_j \in C^\infty(M)$ durch

$$f_j := \begin{cases} H_j \circ \varphi_j & \text{auf } V_j \\ 0 & \text{auf } M \setminus \overline{B_j}. \end{cases}$$

Auf dem Durchschnitt $V_j \setminus \overline{B_j}$ der beiden Definitionsbereiche ergeben beide Ausdrücke 0, f_j ist also wohldefiniert. Auf B_j ist f_j positiv, außerhalb von B_j ist es 0; also ist $\text{supp}(f_j) = \overline{B_j}$.

Wir definieren jetzt $F \in C^\infty(M)$ durch $F(p) := \sum_{j \in J} f_j(p)$ (wegen der lokalen Endlichkeit von $\{B_j\}_{j \in J}$ existiert die Summe). Da die f_j nichtnegativ und auf B_j jeweils positiv sind, ist $F > 0$ (da jedes $p \in M$ in einem B_j liegt). Wenn wir also $g_j := f_j/F \in C^\infty(M)$ setzen, dann ist jedes g_j eine nichtnegative Funktion, die auf B_j positiv ist und für die $\text{supp}(g_j) = \overline{B_j}$ gilt, und es ist $\sum_{j \in J} g_j = F/F = 1$.

Jetzt müssen wir die konstruierten Funktionen g_j noch zu den gesuchten Funktionen $\{\psi_i\}_{i \in I}$ zusammenfassen. Da $\{V_j\}_{j \in J}$ eine Verfeinerung von $\{U_i\}_{i \in I}$ ist, gibt es zu jedem $j \in J$ ein $\lambda(j) \in I$ mit $V_j \subset U_{\lambda(j)}$. Wir setzen

$$\psi_i := \sum_{j \in J: \lambda(j)=i} g_j \in C^\infty(M).$$

Weil die g_j positiv sind und jedes g_j genau auf B_j von 0 verschieden ist, gilt jeweils $\text{supp}(\psi_i) = \overline{\bigcup_{j: \lambda(j)=i} B_j} = \bigcup_{j: \lambda(j)=i} \overline{B_j} \subset U_i$, wobei bei der letzten Gleichheit Lemma A.2 benutzt wurde. Nach diesem Lemma ist außerdem $\{\overline{B_j}\}_{j \in J}$ lokal endlich; da die $\overline{B_j}$ einfach nur zu den Trägern $\text{supp}(\psi_i)$ „zusammengefasst werden“, ist damit auch $\{\text{supp}(\psi_i)\}_{i \in I}$ lokal endlich.

Nach Konstruktion nehmen die ψ_i Werte in $[0, 1]$ an und es gilt $\sum_{i \in I} \psi_i = 1$. \square