0. Lineare Algebra und mehrdimensionale Analysis

Übungen aus dem Skript

1. Zeige, dass die duale Abbildung (Definition 0.9) linear ist.
2. Beweise Proposition 0.11.

1. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Übungen aus dem Skript

1. Zeige, dass die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit ist, indem du sie lokal als Graph darstellst (Beispiel 1.4 (d)).

2. Zeige mit dem Satz vom regulären Wert, dass die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

3. Zeige: Die von einem lokalen Flachmacher induzierte Karte (Konstruktion 1.7) ist ein Homöomorphismus.

4. Zeige: Kartenwechsel zwischen von lokalen Flachmachern induzierten Karten sind glatt (Lemma 1.8).

5. Zeige: Verkettungen glatter Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten sind glatt (Proposition 1.12).

6. Zeige: Induzierte Karten sind Diffeomorphismen (Lemma 1.14).

7. Rechne die partiellen Ableitungen aus Beispiel 1.18 nach.

8. Rechne die Transformationsformel für Tangentialvektoren nach (Proposition 1.31).

9. Zeige: Das Differential ist eine wohldefinierte, lineare Abbildung (Lemma 1.33). (Tipp im Skript)

10. Beweise Proposition 1.34 über das Differential von reellwertigen Funktionen.

11. Beweise Proposition 1.36 über die duale Basis zur Koordinatenbasis einer Karte.

12. Beweise die Kettenregel (Satz 1.37).

13. Beweise Proposition 1.39 über das Zusammenspiel des Differentials mit Diffeomorphismen. (Tipp: Verwende die Kettenregel.)

Zusätzliche Übungen

1. Nach Proposition 1.32: Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die offene Menge

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}.$$

Die *Polarkoordinaten* auf $\mathbb{R}^2$ sind die Karte

$$\Phi = (\varphi, r) \colon U \to (-\pi, \pi) \times (0, \infty),$$

die durch die Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1} \colon (-\pi, \pi) \times (0, \infty) \to U, (\varphi, r) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

gegeben ist (dabei haben wir die „böse Notation" benutzt, die Punkte im Bildbereich der Karte genauso zu nennen wie die Kartenabbildungen selbst). Berechne mithilfe der Transformationsformel die Koordinatenvektoren $\frac{\partial}{\partial \varphi}\big|_p$, $\frac{\partial}{\partial r}\big|_p$ in der Koordinatenbasis der Standardkarte $(x, y) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ auf $\mathbb{R}^2$.

2. Hutfunktionen, Vektorfelder und Einsformen

Übungen aus dem Skript

1. Zeige, dass der Kommutator eine Derivation ist, also ein Vektorfeld definiert (Lemma 2.22).

2. Beweise die Eigenschaften des Kommutators (Proposition 2.23).

Zusätzliche Übungen

1. Nach Abschnitt 2.2.2: Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der Standardkarte (x^1, x^2) und die beiden Vektorfelder $X := \frac{\partial}{\partial x^1}, Y := x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$. Berechne den Kommutator $[X, Y]$.

2. Nach Beispiel 2.29: Wir betrachten weiter $\mathbb{R}^2$ mit der Standardkarte (x^1, x^2). Berechne die Differentiale $\mathrm{d}f \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ der folgenden Funktionen:
   (a) $f_a = \sin(x^1) + \cos(x^1(x^2)^2)$
   (b) $f_b = (x^1 + x^2)^2$
   (c) $f_c = \frac{x^1}{1+(x^2)^2}$

3. Wie in Beispiel 1.18 betrachten wir jetzt auf $\mathbb{R}^2$ zusätzlich die Karte $y = (y^1, y^2)$ mit $y^1 = x^1 + x^2$, $y^2 = x^2$. Drücke eine der obigen Funktionen in dieser Karte aus und berechne das Differential bzgl. dieser Karte. Überzeuge dich, dass du dasselbe Ergebnis erhältst wie oben. (Nach Konstruktion muss das so sein, aber es ist auch gut, das mal explizit an Beispielen zu sehen.)

3. Alternierende multilineare Algebra

Übungen aus dem Skript

1. Zu Def. 3.1: Zeige, dass eine multilineare Abbildung genau dann alternierend ist, wenn sie vollständig antisymmetrisch ist. Wo geht ein, dass 2 invertierbar ist?

2. Zu Satz 3.6: Sei $\alpha\colon V^k \to W$ eine alternierende k-lineare Abbildung, und die Abbildung f_α definiert durch

$$f_\alpha\left(\sum_{a=1}^{N} v_{a,1} \wedge \cdots \wedge v_{a,k}\right) = \sum_{a=1}^{N} \alpha(v_{a,1}, \ldots, v_{a,k}). \tag{1}$$

   Zeige, dass $f_\alpha\colon \bigwedge^k V \to W$ wohldefiniert und linear ist.

3. Beweise Proposition 3.10 über die Eigenschaften des Dachprodukts.

4. Zu Proposition 3.12: Sei $\{b_i\}_{i\in I}$ eine Basis von V. Zeige, dass dann die Menge $\{b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_k}\}_{i_1,\ldots,i_k \in I, i_1 < \cdots < i_k}$ ein Erzeugendensystem für $\bigwedge^k V$ ist.

5. Zu Proposition 3.16: Mache dir klar, dass die in (3.24) gegebene Linearkombination wirklich α ergibt und die Koeffizienten eindeutig bestimmt sind.

Zusätzliche Übungen

1. Nach Definition 3.3: Drücke die folgenden Dachprodukte von Vektorn in $\mathbb{R}^3$ durch Dachprodukte der Vektoren der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ aus.

   (a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}b\\a\\0\end{pmatrix}$

2. Nach Notation 3.19: Sei $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ die Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$, die dual zur Standardbasis ist. Betrachte die alternierenden Multilinearformen $\alpha = 2\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^2 \wedge \theta^3 \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)^*$, $\beta = 3\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \in \bigwedge^3(\mathbb{R}^3)^*$ und die Vektoren $u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Berechne die Ausdrücke $\alpha \wedge \theta^1$, $\alpha(u, v)$, $\alpha(u, w)$ und $\beta(u, v, w)$ (oder, wenn du möchtest, andere Kombinationen, die dir einfallen).

4. Differentialformen

Übungen aus dem Skript

1. Zu Satz 4.12: Zeige, dass die durch die Koordinatenformel (4.10) definierte Operation $\mathrm{d}\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ die Eigenschaften $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ und $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ erfüllt.

Zusätzliche Übungen

Nach Beispiel 4.14:

1. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit der Standardkarte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = x = (x^1, x^2, x^3)$. Berechne die äußeren Ableitungen der folgenden Differentialformen:
   (a) $\sin(x^2) x^1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \frac{1}{1+(x^3)^2} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3$
   (b) $x^1 \mathrm{d}x^1 + \cos(x^1) \mathrm{d}x^2$
   (c) $\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+\sqrt{2+(x^3)^4}} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$

2. Auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0) \mid a \leq 0\}$ betrachten wir wieder die Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
&(\varphi, r)\colon U \to (-\pi, \pi) \times (0, \infty),\\
&\Phi^{-1}\colon (-\pi, \pi) \times (0, \infty) \to U, (\varphi, r) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).
\end{aligned}
$$

   Außerdem seien (x, y) die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$. Berechne $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ auf U in Polarkoordinaten. Benutze das, um umgekehrt $\mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}r$ durch $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ auszudrücken. Erkenne, dass sich $\mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}r$ eindeutig zu glatten Einsformen auf der gesamten „gelochten Ebene“ $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fortsetzen lassen. Argumentiere, dass die so definierten Formen $\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}r \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ geschlossen sind.

3. Wir betrachten wieder $\mathbb{R}^3$ mit der Karte $x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Wir definieren einen Isomorphismus

$$\flat\colon \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3), X \mapsto X^\flat \tag{2a}$$

   durch

$$\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)^\flat := \sum_{i=1}^3 X^i \mathrm{d}x^i \tag{2b}$$

(beachte, dass dies eine kartenabhängige Definition ist![1]). Weiter definieren wir

$$*\colon \Omega^1(\mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3) \tag{3a}$$

durch

$$*\,(\alpha_i \, \mathrm{d}x^i) := \alpha_1 \, \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \alpha_2 \, \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + \alpha_3 \, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \tag{3b}$$

(auch dies ist kartenabhängig, bzw. zusatzstrukturabhängig). Rechne nach, dass für Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ und Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ folgendes gilt:

(a) $\mathrm{d}f = (\operatorname{grad} f)^\flat$

(b) $\mathrm{d}X^\flat = *(\operatorname{rot} X)^\flat$

(c) $\mathrm{d}{*}X^\flat = (\operatorname{div} X) \, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$

Die Identitäten $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$, $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$ der Vektoranalysis sind damit also Spezialfälle von $\mathrm{d}^2 = 0$.

[1] Tatsächlich hängt die Definition nicht von der Karte ab, sondern ist von einer Zusatzstruktur induziert, nämlich der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$. Genaueres kann ich euch außerhalb des Kurses erklären, wenn ihr möchtet.

5. Transport und die Lie-Ableitung

Übungen aus dem Skript

1. Beweise Proposition 5.4 über Pushforwards von Vektorfeldern entlang einer Verkettung.
2. Beweise Proposition 5.5 über Pushforwards von Ableitungen.
3. Beweise Proposition 5.8 über Pullbacks von Formen entlang einer Verkettung.
4. Beweise Proposition 5.9 über Rechenregeln für Pullbacks von Formen. (Tipp im Skript)
5. Beweise die Skalierungseigenschaft von Integralkurven (Proposition 5.13).
6. Beweise Lemma 5.24 über das Zusammenspiel der Lie-Ableitung mit dem Dachprodukt und der äußeren Ableitung. (Tipp: benutze die entsprechenden Eigenschaften des Pullbacks aus Proposition 5.9)
7. Beweise Cartans magische Formel (Satz 5.25). (Tipp im Skript)

Zusätzliche Übungen

1. Nach Definition 5.21: Seien X, Y wie in der zusätzlichen Übung 1 zu Kapitel 2. Bestimme die Flüsse von X und Y. Berechne die Lie-Ableitungen $\mathcal{L}_X Y$ und $\mathcal{L}_Y X$ anhand der Definition über den Fluss.
2. Auf $\mathbb{R}^3$ mit Standardkarte (x^1, x^2, x^3) betrachten wir das Vektorfeld $X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$ und die 2-Form $\alpha = x^2\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + \sin(x^1)\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$. Berechne die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_X \alpha$ einerseits mit der Definition über den Fluss und andererseits mit Cartans magischer Formel.

6. Integration auf Mannigfaltigkeiten

Übungen aus dem Skript

1. Zeige, dass jede Mannigfaltigkeit, die von zwei Karten überdeckt wird, deren Definitionsbereiche (weg-)zusammenhängenden Schnitt haben, orientierbar ist (Beispiel 6.5 (c)).

2. Beweise Lemma 6.11 über die Kartenunabhängigkeit des Integrals von in Kartenumgebungen kompakt getragenen Formen. Wo geht ein, dass die Karten positiv orientiert sind? (Tipp: Benutze die Tramsformationsformel für Integrale im $\mathbb{R}^n$!)

3. Beweise, dass das Integral von Formen linear und verträglich mit Pullback entlang orientierungserhaltender Diffeomorphismen ist (Proposition 6.14). (Tipp im Skript)

Zusätzliche Übungen

1. Auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ betrachten wir die *Kugelkoordinaten*

$$\Phi = (\theta, \varphi) \colon S^2 \setminus \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y = 0\} \to (0, \pi) \times (0, 2\pi), \tag{4a}$$

die gegeben sind durch die Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1} \colon (0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni (\theta, \varphi) \mapsto (\cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta)). \tag{4b}$$

(Sie sind also auf S^2 ohne den „Nullmeridian“ nicht definiert). Die *Standard-Volumenform* auf S^2 ist $\omega = \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$. Berechne das Volumen

$$\mathrm{vol}(S^2) := \int_{S^2} \omega. \tag{5}$$

2. Wir betrachten auf der „gelochten Ebene“ $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die geschlossene Form $\alpha \in \Omega^1(M)$, die auf dem Definitionsbereich U der Polarkoordinaten (r, φ) durch $\alpha|_U = \mathrm{d}\varphi$ gegeben ist (siehe zusätzliche Übung 2 zu Kapitel 4). Berechne das Integral von α über den Einheitskreis $S^1 \subset M$. Schlussfolgere mit dem Satz von Stokes, dass α nicht exakt ist. Wie passt das mit $\alpha|_U = \mathrm{d}\varphi$ zusammen?

   (Wir haben also gezeigt, dass α eine nichttriviale de-Rham-Kohomologieklasse $0 \neq [\alpha] \in H^1_{\mathrm{dR}}(M)$ definiert.)

7. Grundlagen der symplektischen Geometrie

Übungen aus dem Skript

1. Beweise Lemma 7.4 über das symplektische Komplement. (Tipp im Skript)
2. Beweise Lemma 7.6 über die Charakterisierung von symplektischen Unterräumen.
3. Berechne die Form von Hamilton-Vektorfeldern in kanonischen Koordinaten (Proposition 7.16).

Zusätzliche Übungen

1. Wie sieht die Poisson-Klammer $\{f, g\}$ in kanonischen Koordinaten aus?
2. Was sind die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen zur Hamilton-Funktion H, also die Gleichungen für die Integralkurven des Hamilton-Vektorfelds X_H, in kanonischen Koordinaten?