0. Lineare Algebra und mehrdimensionale Analysis

Übungen aus dem Skript

1. Beweise Lemma 0.2.11.

1. Mannigfaltigkeiten

Übungen aus dem Skript

1. Zeige: In einem Hausdorffraum sind kompakte Mengen abgeschlossen (Lemma 1.1.7).
2. Zeige: Die Verkettung stetiger Abbildungen ist stetig (Lemma 1.1.10).
3. Zeige: $f\colon X \to Y$ stetig , $K \subset X$ kompakt $\Rightarrow f(K) \subset Y$ kompakt (Lemma 1.1.11).
4. Zeige: Die Fortsetzung eines nichtleeren Atlanten zu einem maximalen Atlanten ist eindeutig (Lemma 1.2.5).
5. Zeige: Die Verkettung glatter Abbildungen von Mannigfaltigkeiten ist glatt (Lemma 1.3.2).
6. Zeige: Eine Karte ist ein Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten (Lemma 1.3.4).

Zusätzliche Übungen

1. Konstruiere aus den Atlanten zweier Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 einen Atlanten der Produktmannigfaltigkeit.
2. Zeige: Für eine Produktmannigfaltigkeit $M_1 \times M_2$ sind die kanonischen Projektionen $\pi_i\colon M_1 \times M_2 \to M_i$ $(i = 1, 2)$ glatt und für eine weitere Mannigfaltigkeit N mit Abbildung $f\colon N \to M_1 \times M_2$ gilt:
$$f \text{ ist glatt} \Leftrightarrow \pi_i \circ f \text{ ist glatt für } i = 1, 2 \tag{1}$$
3. Wir betrachten die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Neben der üblichen Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ sind die *Polarkoordinaten* eine natürliche Wahl. Dazu betrachten wir die offene Menge $U = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ zur Konstruktion von Karten. Die Karte ist dann $x\colon U \to (-\pi, \pi) \times (0, \infty), z \mapsto (|z|, \operatorname{Arg}(z))$ und die inverse Abbildung ist $x^{-1}\colon (-\pi, \pi) \times (0, \infty) \to U, (\varphi, r) \mapsto re^{i\phi}$. Mache Dir klar, dass S^1 eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}$ ist.

2. Der Tangentialraum und das Differential

Übungen aus dem Skript

1. Zeige: $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ ist mit über die Repräsentanten definierter Addition, Skalarmultiplikation und Multiplikation eine $\mathbb{R}$-Algebra. (Prop. 2.1.2)

2. Zeige: T_pM ist ein Untervektorraum von $(\mathcal{C}_p^\infty(M))^*$. (Def. 2.1.3)

3. Zeige: Ist $\gamma\colon I \to M, \gamma(s) = p$ eine konstante Kurve, so ist der abstrakte Geschrindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(s) = 0$.

4. Zeige: Das Differential ist eine wohldefinierte, lineare Abbildung. (Prop. 2.2.2)

5. Ist $\gamma\colon I \to M$ eine glatte Kurve und $f\colon M \to N$ glatt, so ist $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma\colon I \to N$ eine Kurve in M. Zeige: $\dot{\tilde{\gamma}}(s) = \mathrm{D}f|_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s))$. (Bem. 2.2.3)

6. Beweise Lemma 2.2.5 über das Zusammenspiel des Differentials mit Diffeomorphismen. Tipp: Verwende die Kettenregel.

7. Zeige Lemma 2.3.6: Bezüglich der kanonischen Identifikation $V \equiv T_pV$ gilt $\gamma'(s) \equiv \dot{\gamma}(s)$ für jede Kurve $\gamma\colon I \to V$. Dabei bezeichnet γ' die Ableitung als Differentialquotienten und $\dot{\gamma}$ den abstrakten Tangentialvektor. (Hinweis: Verwende die mehrdimensionale Kettenregel für vektorwertige Abbildungen!)

8. Sei $f\colon M \to N$ glatt, x eine Karte von M und y eine Karte von N. Zeige, dass die Darstellungsmatrix des Differentials von f bzgl. der Koordinatenbasen die Jacobi-Matrix der Kartendarstellung von f ist. (Lemma 2.4.8)

9. Rechne die Transformationsformel für Tangentialvektoren nach. (Lemma 2.4.10)

10. Beweise, dass sich die Identifikation $V \equiv T_pV$ für einen Vektorraum V folgendermaßen schreiben lässt (Lemma 2.5.2):
$$V \ni v \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p + tv)\bigg|_{t=0} \in T_pV.$$

11. Zeige: Die Koordinatenvektoren sind durch die Ableitungen der Koordinatenlinien gegeben (Lemma 2.5.4).

12. Zeige: Jeder Tangentialvektor lässt sich als Ableitung einer Kurve schreiben (Lemma 2.5.5).

Zusätzliche Übungen

1. Nach Lemma 2.4.10: Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die offene Menge $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x \leq 0\}$. Die *Polarkoordinaten* auf $\mathbb{R}^2$ sind die Karte $\Phi = (\varphi, r)\colon U \to (-\pi, \pi) \times (0, \infty)$, die durch die Umkehrabbildung $\Phi^{-1}\colon (-\pi, \pi) \times (0, \infty), (\varphi, r) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ gegeben ist (dabei haben wir die „böse Notation" benutzt, die Punkte im Bildbereich der Karte genauso zu nennen wie die Kartenabbildungen selbst). Berechne mithilfe der Transformationsformel die Koordinatenvektoren $\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial r}\Big|_p$ in der Koordinatenbasis der Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$.

2. Nach Abschnitt 2.5: Fasse S^1 als Untermannigfaltigkeit der komplexen Zahlen auf und erzeuge die Tangentialräume T_pS^1 durch Kurven.

3. Nach Lemma 2.6.2: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit, und sei (y, U) eine Karte von M. Die durch die Identität gegebene Karte von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit x. Berechne die Koordinatenvektoren $\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$ so konkret wie möglich als Vektoren in $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$.

4. Nach Lemma 2.6.2: Sei N eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M und $p \in N$. Charakterisiere die Vektoren in $T_pN \subset T_pM$ als Derivationen von Funktionskeimen an M in p.

5. Nach Abschnitt 2.6: Zeige mit dem Satz vom regulären Wert, dass die Sphären S^n Untermannigfaltigkeiten der euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ sind.

3. Multilineare Algebra: Das Tensorprodukt

1. Beweise Lemma 3.1.2 über die Eigenschaften des Tensorprodukts $V \otimes W$.

2. Zu Satz 3.1.3: Sei $B\colon V \times W \to X$ eine bilineare Abbildung, und die Abbildung f_B definiert durch
$$f_B\left(\sum_{i=1}^{k} v_i \otimes w_i\right) := \sum_{i=1}^{k} B(v_i, w_i).$$
Zeige, dass $f_B\colon V \otimes W \to X$ wohldefiniert und linear ist.

3. Zu Lemma 3.1.5: Zeige, dass $V \otimes W \to W \otimes V, \quad v \otimes w \mapsto w \otimes v$ ein Isomorphismus ist.

4. Zu Def. 3.3.1: Beweise die Transformationsformel für Tensorkomponenten unter Basiswechsel.

5. Beweise Lemma 3.3.3 über die Komponentendarstellungen von Operationen mit Tensoren.

5. Vektorbündel

Übungen aus dem Skript

1. Konstruiere aus Karten einer Mannigfaltigkeit einen Bündelatlas des Tangentialbündels (Beispiel 5.2.3).
2. Zeige Korollar 5.2.9: Ein Vektorbündel ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Rahmen besitzt.
3. Mache Dir klar, dass ein zurückgezogener Schnitt tatsächlich ein Schnitt des zurückgezogenen Bündels ist (dabei gilt es zwei Eigenschaften zu prüfen).
4. Zeige, dass die zurückgezogenen Schnitte die Schnitte des zurückgezogenen Bündels erzeugen. (Lemma 5.3.10; Hinweis: Betrachte lokale Rahmen und verwende Hutfunktionen.)

Weitere Übungen

1. Beweise, dass das Möbiusbündel nicht trivialisierbar ist (Hinweis: Verwende Korollar 5.2.9 und den Zwischenwertsatz unter Verwendung von Trivialisierungen).
2. Überlege Dir, dass die Whitney-Summe zweier Möbiusbündel trivialisierbar ist.

6. Vektorfelder

Übungen aus dem Skript

1. Zeige, dass der Kommutator eine Derivation ist, also ein Vektorfeld definiert. (Def. 6.2.2)

2. Beweise die Eigenschaften des Kommutators. (Lemma 6.2.3)

3. Beweise Lemma 6.3.4 über Pushforwards von Ableitungen.

4. Beweise die Formel für die Koordinatendarstellung von Pushforwards (Lemma 6.3.6).

5. Beweise die Skalierungseigenschaft von Integralkurven (Lemma 6.4.3).

Weitere Übungen

1. Nach Abschnitt 6.2: Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Karte (x, y) und die beiden Vektorfelder $X := \frac{\partial}{\partial x}, Y := x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Berechne den Kommutator $[X, Y]$.

2. Nach Abschnitt 6.3: Seien X, Y wie in der vorherigen Aufgabe. Bestimme die Flüsse von X und Y. Berechne die Lie-Ableitungen $\mathcal{L}_X Y$ und $\mathcal{L}_Y X$ anhand der Definition über den Fluss.

7. Lie-Gruppen

Übungen aus dem Skript

1. Mache Dir noch einmal die Schritte zur Konstruktion der Lie-Algebra bewusst und entwickle ein konzeptionelles Verständnis.

2. Zeige, dass der Kommutator von linksinvarianten Vektorfeldern linksinvariant ist (Satz 7.1.4).

3. Beweise die Eigenschaften der Exponentialabbildung (Lemma 7.2.2).

Weitere Übungen

1. Zu Beispiel 7.1.2: Zeige, dass $\mathrm{SL}(n) \subset \mathrm{GL}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit ist, und zeige damit, dass $\mathrm{SL}(n)$ eine Lie-Gruppe ist. Berechne außerdem den Tangentialraum $T_{\mathbb{1}}\mathrm{SL}(n) \subset T_{\mathbb{1}}\mathrm{GL}(n) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) = M(n \times n)$. (Tipp: Benutze den Satz vom regulären Wert!)

2. Zu Beispiel 6.1.7: Zeige, dass für $A, B \in \mathfrak{gl}(n) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) = M(n \times n)$ die Lie-Klammer durch den Kommutator von Matrizen gegeben ist, $[A, B] = AB - BA$. (Anleitung: Bestimme $L(A) \in \mathfrak{X}^L(\mathrm{GL}(n))$ und rechne dann die Definition der Lie-Klammer nach. Du musst in Koordinaten rechnen.)

3. Bestimme die Exponentialabbildung der Lie-Gruppe $(\mathbb{R}, +)$.

4. Bestimme die Exponentialabbildung der Lie-Gruppe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

5. Berechne eine Basis der linksinvarianten Vektorfelder von $\mathrm{U}(1)$. Hinweis: Betrachte dazu $\mathrm{U}(1) \cong S^1$ wie zuvor als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}$ und überlege Dir zuerst anschaulich, wie das Differential der Linkstranslationen auf das Tangentialbündel wirkt.

6. Zeige: Lie-Gruppen sind parallelisierbar (d. h. ihr Tangentialbündel ist trivial).

8. Tensorbündel und Tensorfelder

Übungen aus dem Skript

1. Beweise Satz 8.2.6: Die durch den Pullback definierte Lie-Ableitung von Tensoren ist eine Tensorderivation.

9. Wenn noch Zeit ist: Kovariante Ableitungen

Übungen aus dem Skript

1. Beweise, dass die kovariante Ableitung lokal wirkt (also nur vom Wert des Schnittes und des Vektorfeldes an einem Punkt abhängt; Lemma 9.1.3).